

IDENTIFICATION DES PARAMETRES D'UN SYSTEME INTEGRO-DIFFERENTIEL

APPLICATION AU PROBLEME BIOLOGIQUE DE LA CINETIQUE
NORMALE ET PATHOLOGIQUE DU FER RADIOACTIF

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE NANCY I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES

par

Claudine MONOT

Soutenue publiquement le 19 Juin 1975 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

<i>Président :</i>	M. J. LEGRAS
<i>Examineurs :</i>	MM. J. MARTIN
	C. GILORMINI
	M. LUCIUS
	Y. NAJEAN

IDENTIFICATION DES PARAMETRES D'UN SYSTEME INTEGRO-DIFFERENTIEL

APPLICATION AU PROBLEME BIOLOGIQUE DE LA CINETIQUE
NORMALE ET PATHOLOGIQUE DU FER RADIOACTIF

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE NANCY I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES

par

Claudine MONOT

Soutenue publiquement le 19 Juin 1975 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président :	M. J. LEGRAS
Examineurs :	MM. J. MARTIN
	C. GILORMINI
	M. LUCIUS
	Y. NAJEAN

D'UN SYSTEME INTEGRO-DIFFERENTIEL IDENTIFICATION DES PARAMETRES

APPLICATION AU PROBLEME BIOLOGIQUE DE LA CINETIQUE
NORMALE ET PATHOLOGIQUE DU FER RADIOACTIF

THESE

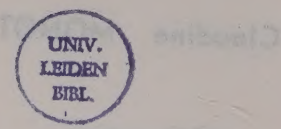
présentée à

L'UNIVERSITE DE NANCY I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES

par



Soutenue publiquement le 19 Juin 1975 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

- | | |
|--------------|-------------|
| M. J. LEGRAS | Président |
| M. I. MARTIN | Examinateur |
| C. OLLIVIER | |
| M. LUCIUS | |
| Y. NAJEAN | |

Ce travail a été réalisé sous la direction de Monsieur le Professeur J. LEGRAS à qui je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance pour ses conseils et ses encouragements. Toujours sensible à toute difficulté de ses chercheurs, qu'il trouve, ici, le témoignage de toute mon admiration pour ses qualités humaines.

Que Monsieur le Professeur J. MARTIN qui dirige depuis sept ans mes travaux d'Informatique Médicale au C.N.R.S. soit assuré de ma profonde gratitude pour la formation qu'il m'a donnée et les conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer. Je n'oublierai jamais les encouragements et le soutien qu'il a su m'apporter à tout moment et qui m'ont été très précieux. Je tiens à lui en témoigner, ici, toute ma reconnaissance.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur C. GILORMINI de me faire l'honneur de sa participation au Jury.

Que Monsieur le Professeur M. LUCIUS sache que je lui suis très reconnaissante d'avoir accepté d'être mon rapporteur et de me faire l'honneur d'être membre du Jury.

Je tiens à témoigner toute ma gratitude à Monsieur le Professeur NAJEAN qui est à l'origine de ce travail et nous a demandé cette étude mathématique. Je le remercie de sa confiance et des nombreux conseils qu'il m'a donnés ainsi que de l'honneur qu'il me fait en participant au Jury.

Je remercie Monsieur le Professeur C. BURG, Directeur de l'I.N.S.E.R.M., de l'intérêt qu'il a porté à mes travaux et de son appui.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur G. MILHAUT de s'être vivement intéressé à ces applications médicales de l'Informatique et d'avoir accepté d'être mon parrain de recherches au C.N.R.S..

Que les membres de la Commission 24 du C.N.R.S. veuillent bien trouver, ici, l'expression de ma respectueuse reconnaissance pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Les programmes ont été mis au point sur l'ordinateur de l'I.U.C.A. de Nancy dont je remercie le Directeur, Monsieur le Professeur PAIR, ainsi que les Ingénieurs et le Personnel de l'Exploitation.

Que soient remerciés mes camarades de recherche de la section d'Informatique Médicale pour leur amical soutien ainsi que tous les membres du secrétariat et de l'exploitation pour leur collaboration et leur dévouement.

Je suis très touchée par la patience dont mon Père a fait preuve pour la réalisation de tous les dessins et je voudrais lui montrer toute ma gratitude et mon affection.

Je n'oublie pas Madame MARCHAND à qui je dois toute la réalisation matérielle de ce mémoire. Je la remercie vivement pour le soin qu'elle a apporté tant à la dactylographie de ce texte et des nombreuses formules, qu'à la reliure, et également pour sa grande gentillesse.

Je remercie Madame DRIQUERT pour sa diligence lors du tirage de ce mémoire.

A mes Parents et à mon Frère.

SOMMAIRE

	pages
<u>Introduction</u>	1
<u>CHAPITRE I - PRESENTATION DU PROBLEME</u>	5
I Le problème mathématique	5
A : le système intégro-différentiel étudié	5
B : le problème posé	6
C : la méthode utilisée	7
II Le problème biologique : formulation et notations	8
A : les phénomènes physiologiques et pathologiques	8
B : la formulation	12
<u>CHAPITRE II - IDENTIFICATION : LA METHODE DE QUADRATISATION PARTIELLE - PRINCIPE ET APPLICATION</u>	15
I Les méthodes de quadratisation	16
A : La méthode de quadratisation osculatrice	16
B : La méthode de quadratisation par interpolation	17
II La méthode de quadratisation partielle - principe	22
III Extraction du sous espace R^p de R^n tel que la matrice $[G^p(U^r)]$ soit définie positive	30
A : Décomposition d'une matrice symétrique en deux matrices triangulaires	30
B : Détermination de R^p , sous-espace de R^n	32
IV Application de la méthode de quadratisation partielle	37
<u>CHAPITRE III - RESOLUTION DU SYSTEME INTEGRO-DIFFERENTIEL - PRINCIPE DES METHODES UTILISEES</u>	45
I Le système intégro-différentiel - Difficultés et contraintes	45
A : Rappel du système étudié	45
B : Difficultés et contraintes imposées par le problème	46
II La méthode à pas liés, implicite - Application à notre problème	50

A :	La phase itérative	52
B :	La phase d' "amorçage"	65
C :	Initialisation de la phase itérative	79
D :	Organisation des calculs de la méthode à pas liés, implicite	87
III	La méthode à pas liés, implicite, avec variation du pas d'intégration	87
A :	La méthode	89
B :	Modification des grandeurs conservées en mémoire	91
IV	Une autre méthode de résolution du système intégral-différentiel, de type Kutta-Runge	94
A :	La phase itérative	94
B :	La phase d' "amorçage"	96
V	Discussion sur les méthodes utilisées	98

CHAPITRE IV - CALCUL DES INTEGRALES $S = \int_0^v f(\tau) x_2(t-v+\tau) d\tau$

I	Rappel de l'origine de ces intégrales	100
II	Les données	101
III	La méthode utilisée	103
A :	Calcul des éléments ΔS_k de l'intégrale S	103
B :	Calcul de l'intégrale S (T)	117
C :	Cas d'un changement du pas au cours de la résolution du système intégral-différentiel	117
IV	Les résultats : vérification et précision	120
V	Conclusion	125

CHAPITRE V - RESOLUTION DU SYSTEME INTEGRO-DIFFERENTIEL : VERIFICATION ET PRECISION DES RESULTATS

I	Recherche de la solution explicite dans certains cas particuliers	126
A :	1er cas particulier	127
B :	2ème cas particulier	128
II	Vérification des méthodes de résolution utilisées	131

A : Vérification sur un cas normal	132
B : Vérification sur des cas pathologiques de "non-réutilisation"	135
III Influence des divers paramètres introduits	135
A : Méthode à pas liés, implicite, à pas constant	135
B : Méthode à pas liés, implicite, avec modification du pas	138
C : Méthode mixte, de type Kutta-Runge	142
IV Choix de la méthode de résolution du système intégral-différentiel	145
V Conclusion	149

CHAPITRE VI - IDENTIFICATION DES PARAMETRES PAR LA METHODE DE QUADRATISATION PARTIELLE 150

I Vérification de la méthode et des programmes	150
A : 1er exemple : identification des 3 paramètres traduisant la mort extramédullaire	151
B : 2ème exemple : identification de deux paramètres	154
II Etude de la précision des résultats et de la durée des calculs	155
A : Influence du choix de la méthode de résolution du système intégral-différentiel	156
B : Influence des données	159
C : Influence du nombre de paramètres identifiés	160
D : Influence des données initiales des paramètres identifiés	162
E : Influence de la pondération	167
F : Influence secondaire	170
III Interprétation des résultats de l'identification dans des cas simulés	171

CHAPITRE VII - APPLICATIONS DE L'IDENTIFICATION DES PARAMETRES DU MODELE A DES EXPLOITATIONS MEDICALES 174

Introduction	174
I Identification de paramètres à partir de données réelles	175

A : 1er exemple : destruction prématurée de globules dans le sang	176
B : 2ème exemple : mort de cellules intramédullaires	180
II Influence de divers paramètres sur les résultats de l'identification	181
A : Cas de mort précoce d'hématies dans le sang circulant (influence de l'"âge" des globules qui meurent)	183
A1 : Cas d'un malade simulé	183
A2 : Cas d'un malade réel	187
B : Cas de mort de cellules intramédullaires (influence de l'"âge" des cellules qui meurent et de la durée du cycle)	189
B1 : Cas d'un malade simulé	189
B2 : Cas d'un malade réel	191
III Conclusion	196
<u>Conclusion Générale</u>	198
<u>ANNEXE : COMPLEMENTS SUR LES DONNEES</u>	199
I Structure de la matrice [B (U)]	199
II Compléments sur les données correspondant aux essais présentés	201
III Paramètres intervenant dans les tests d'arrêt du programme d'identification	205
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	206

INTRODUCTION

Les modèles de simulation de phénomènes physiologiques sont fréquemment utilisés par les biologistes. Ils permettent en effet, d'obtenir des renseignements qualitatifs ou quantitatifs sur les éléments inaccessibles à l'expérience à partir de mesures de certaines grandeurs contrôlables. C'est ce qui explique leurs nombreuses applications dans le domaine médical. Celles-ci comprennent généralement deux phases :

. la construction du modèle de simulation et l'étude de l'influence de différents paramètres sur les grandeurs intéressantes.

. Le problème inverse c'est-à-dire la détermination des paramètres caractéristiques du modèle à partir de données expérimentales.

C'est à ce problème d'identification de paramètres d'un phénomène particulièrement complexe qu'est consacrée cette étude.

Un problème d'hématologie nous a été posé par le Pr. Najean*. Il concerne les anomalies qui surviennent pendant l'érythropoïèse c'est-à-dire la formation et la maturation dans la moelle, des cellules qui sortiront sous forme de globules rouges ainsi que le devenir de ces derniers dans le sang circulant. Il s'agit de :

déterminer le pourcentage de cellules qui meurent dans la moelle et dans le sang circulant, ainsi que l'instant de cette destruction. Pour les hématies, deux types d'anomalies sont à prévoir selon que la mort précoce est liée ou non à l'âge des cellules.

Pour cette étude les médecins analysent la cinétique du Fer dans l'organisme par l'intermédiaire d'une injection de Fer radioactif servant de traceur.

* Service Central de Médecine Nucléaire - Hopital Saint Louis - Paris
Institut de Recherches sur les Maladies du Sang (Pr J. Bernard).

Comme données de notre problème nous disposons donc de la valeur numérique de la quantité de Fer radioactif contenue dans les globules rouges à différents instants répartis de façon quelconque après l'injection.

Pour résoudre ce problème, nous utilisons un modèle mathématique présenté dans nos travaux antérieurs (Réf. 11, 12, 13) et voisin de celui de G. Nooney (Réf. 18), qui conduit au système intégral-différentiel

$$\frac{d}{dt} X(t) = B(U) \cdot X(t) + \varphi(t, v_i)$$

où :

1° - X(t) représente le tableau des quantités de Fer marqué, au temps t, dans les diverses parties de l'organisme.

2° - $\varphi(t, v_i)$ est un vecteur qui dépend d'intégrales du type :

$$v_i = \int_{a_i}^{b_i} f(\tau) x_2(t - c_i + \tau) d\tau$$

$$\text{avec : } \begin{cases} x_2(w) = 0 \\ \text{si } w \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2(w) = X_2(w) \\ \text{si } w > 0 \end{cases}$$

$f(\tau)$: fonction discontinue, constante "par morceaux" (fonction "escalier").

3° - U est le tableau des paramètres à ajuster

4° - Les conditions initiales $X(0)$ sont connues

5° - Les données expérimentales correspondent aux valeurs prises par la fonction $X_6(t)$ en différents instants t_k .

Le problème mathématique est donc un problème inverse. Il s'agit

d'identifier le vecteur U c'est-à-dire les différents paramètres du système intégral-différentiel pour que la fonction $X_6(t)$, élément de la solution de ce système, soit aussi proche que possible des données expérimentales aux points t_k .

Précisons que les paramètres inconnus doivent appartenir à un domaine imposé par leur définition ou par le phénomène lui-même :

$$U \in [U_{\text{inf}}, U_{\text{sup}}]$$

Pour effectuer cet ajustement nous utilisons la méthode de quadratisation partielle qui s'est révélée très efficace.

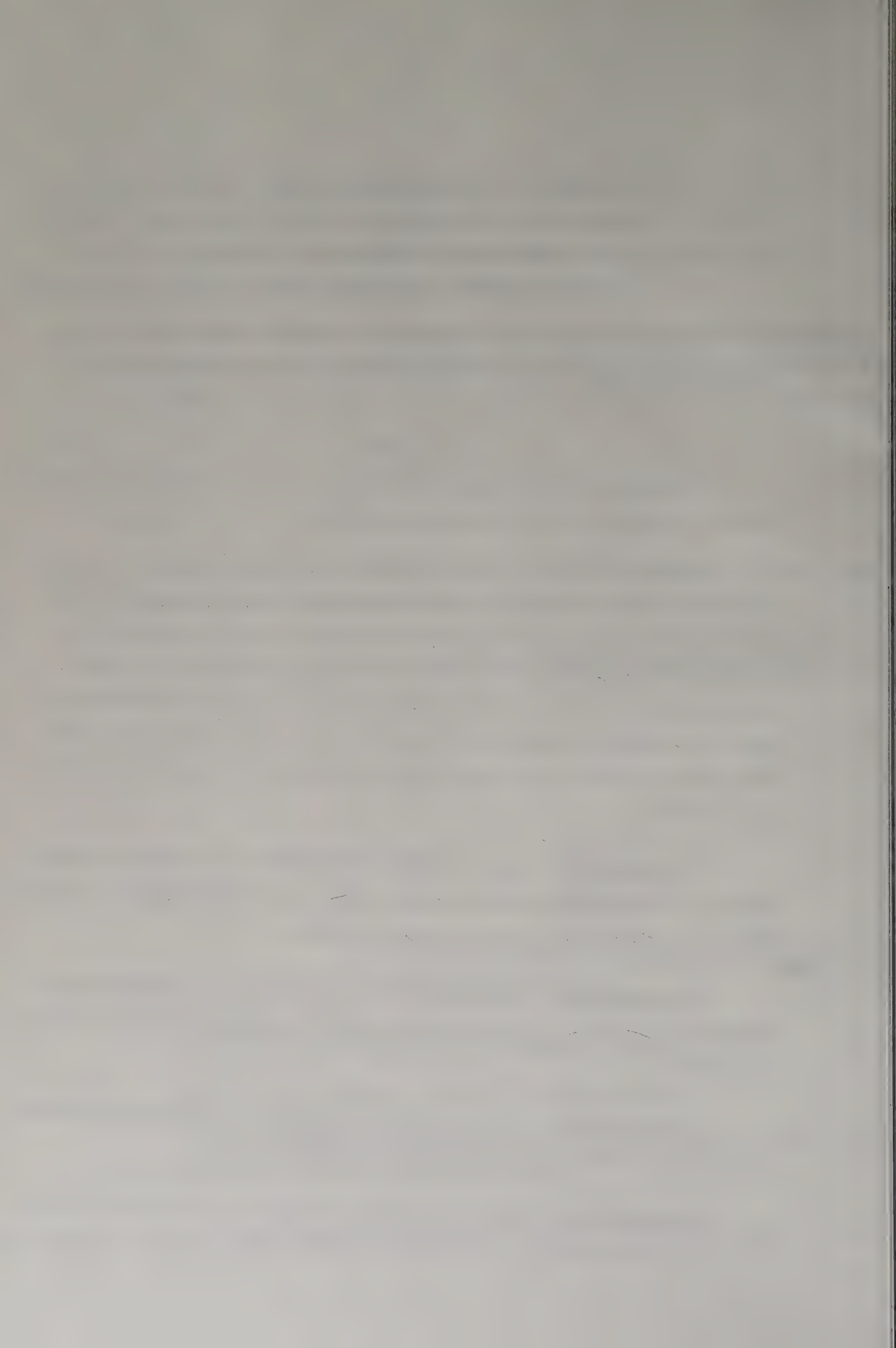
La complexité du système intégral-différentiel entraîne une durée des calculs non négligeable pour sa seule résolution et pouvant devenir trop importante pour que l'on puisse envisager une identification de ce système. Aussi avons nous essayé de réduire au maximum les temps-machine par le choix des techniques utilisées tant pour la résolution du système que pour l'ajustement des paramètres. Cette philosophie nous fait préférer l'efficacité à une certaine élégance des algorithmes et des programmes.

Le chapitre I est consacré à la description du problème mathématique. Nous évoquons rapidement le phénomène physiologique. Quelques détails complémentaires sont donnés en Annexe.

Au chapitre II nous rappelons le principe de la méthode de quadratisation partielle et présentons son mode d'application à notre problème particulier.

Le chapitre III est consacré au principe des différentes méthodes essayées pour résoudre le système intégral-différentiel.

Au chapitre IV nous présentons la méthode de calcul des intégrales v_i du second membre du système, qui nécessite la mise en mémoire de



l'élément $x_2(t)$ de la solution $X(t)$.

Le chapitre V est consacré à la comparaison des résultats de la résolution du système intégral-différentiel obtenus avec les différentes méthodes employées.

Au chapitre VI nous analysons les résultats de l'identification des paramètres à partir de données simulées, ce qui permet d'apprécier la précision des calculs. L'influence de divers facteurs y est étudiée afin de préparer l'exploitation en routine de données expérimentales dans de bonnes conditions.

Le chapitre VII est consacré aux résultats correspondant à des données réelles. Deux voies d'application de notre programme y sont présentées.

Quelques précisions pratiques

Le programme a été mis au point sur un ordinateur C.I.I. 10070. Les temps de calcul reportés dans cette étude correspondent donc à son exécution sur ce type d'ordinateur.

Il est écrit en Fortran IV étendu, et occupe en mémoire, une place de 25 K mots (de 32 bits). Il est disponible à l'adresse suivante :

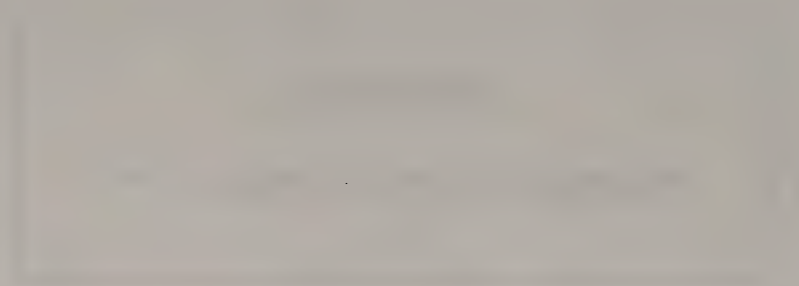
Section d'Informatique Médicale
Groupe de Recherches INSERM U. 115
Faculté de Médecine
B.P. 1080

54019 - NANCY CEDEX



CHAPITRE I

PRESENTATION DU PROBLEME



La simulation de la cinétique du Fer radioactif dans les cas normaux ou pathologiques, conduit à un système intégral-différentiel. Le problème posé par les médecins correspond à la recherche de certains paramètres de ce système à partir de données ponctuelles expérimentales. Nous présentons, dans ce chapitre, le système détaillé d'équations et le problème mathématique posé. Puis nous donnons quelques détails du modèle biologique utilisé pour montrer la correspondance entre les différentes grandeurs et contraintes mathématiques et celles du phénomène réel. Les compléments sur la structure du modèle biologique et sur sa formulation sont exposés dans nos publications antérieures (Réf. 11, 12, 13, 15).

I - LE PROBLEME MATHEMATIQUE

Il s'agit d'un problème inverse, c'est-à-dire d'une identification de paramètres d'un système intégral-différentiel.

A : Le système intégral-différentiel étudié - contraintes et notations

La formulation des échanges de Fer radioactif dans l'organisme après injection intraveineuse, aboutit au système :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_j a_j(U) \int_0^{b_j} f(\tau) x_2(t - c_j + \tau) d\tau \\ 0 \\ 0 \\ \sum_k a_k(U) \int_0^{b_k} f(\tau) x_2(t - c_k + \tau) d\tau \end{bmatrix}$$

où :

$$\begin{cases} x_2(w) = 0 \\ \text{si } w \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(w) = X_2(w) \\ \text{si } w > 0 \end{cases}$$

- . U : est le tableau des paramètres constants $u_1, u_2 \dots$ que nous devons déterminer.
- . B (U) : est une matrice carrée, à coefficients constants, dépendant des paramètres u_i et de structure connue (Annexe).
- . f (τ) : est une fonction "escalier" connue, définie sur l'intervalle [0, θ] et toujours positive.
- . X (0) : tableau des valeurs initiales, est également donné.
- . $a_j(U), b_j, c_j, a_k(U), b_k$ et c_k sont des expressions ou des constantes précisées au chapitre III.

B : Le problème posé

Etant donnée une courbe expérimentale connue par points, déterminer certains des paramètres u_i du système intégral-différentiel pour que la courbe qui représente la fonction $x_6(t)$, élément de solution de ce système soit aussi proche que possible de ces points.

- D'autre part les paramètres doivent appartenir à un domaine imposé par les conditions physiologiques :

$$U \in [U_{\text{inf}}, U_{\text{sup}}]$$

- Comme données nous disposons de 8 points environ, dont la répartition est quelconque et varie d'un malade à l'autre.

- Le choix des paramètres à ajuster varie également d'un type de maladie à un autre. Il est fait par les médecins en fonction d'autres examens. La valeur à donner aux paramètres non identifiés est alors

imposée ; elle est nulle en cas d'absence de l'anomalie correspondante.

C : La méthode utilisée :

a : Le critère d'approximation

Pour l'ajustement du tableau [U] , il nous faut définir un critère d'approche. Nous choisissons l'approximation au sens des moindres carrés c'est-à-dire la minimisation de la fonction coût :

$$F(U) = \sum_k (X_6(t_k) - \text{Mes}(t_k))^2$$

Mes(t_k) étant la valeur numérique donnée par la mesure expérimentale effectuée à l'instant t_k .

Ce sont donc les valeurs des paramètres u_i qui minimisent cette fonction $F(U)$, que nous recherchons.

Remarque :

Afin d'accroître l'importance de mesures caractéristiques d'une anomalie particulière, nous avons prévu la possibilité de pondérer les écarts en certains points en prenant comme fonction coût :

$$F(U) = \sum_k p_k (X_6(t_k) - \text{Mes}(t_k))^2$$

p_k étant le facteur de pondération au point (t_k).

b : La méthode d'identification

C'est une méthode de quadratisation qui a été retenue en raison de la rapidité de la convergence de ses résultats.

Elle consiste à remplacer la fonction coût $F(U)$ par un polynôme quadratique d'interpolation et à rechercher le minimum de ce polynôme par étapes successives.

La méthode de quadratisation partielle qui a été utilisée est, de plus, une méthode de descente certaine : une suite de vecteurs U est formée, telle que :

$$F(U)_i < F(U)_{i-1}$$

Le principe est rappelé au chapitre suivant.

c : La méthode de résolution du système intégral-différentiel

Ayant essayé précédemment une variante de la méthode de Kutta-Runge, nous avons employé la méthode à pas liés, implicite, avec modification éventuelle du pas d'intégration en cours de résolution.

Le principe de ces méthodes est exposé au chapitre III, les résultats faisant l'objet du chapitre V.

II - LE PROBLEME BIOLOGIQUE : FORMULATION ET NOTATIONS

A : Les phénomènes physiologiques et pathologiques

Une dose de Fer radioactif lié à sa globuline porteuse (sidérophiline ou transferrine) est injectée à un malade :

. pour permettre l'étude de son utilisation au cours de l'érythropoïèse c'est-à-dire pendant la formation et la maturation des cellules médullaires. Ce sont ces dernières qui, après plusieurs divisions successives, donneront, à leur maturité, des globules rouges ou hématies du sang circulant, ainsi porteurs d'hémoglobine marquée.

. et pour suivre le devenir de ces globules rouges dans le sang circulant.

Après l'injection, dans une première étape, le Fer radioactif se répartit dans l'organisme (Fig. 1). Une partie arrive progressivement dans la moelle (X_2), où elle sera absorbée par les cellules médullaires en cours de maturation, après des transformations biochimiques qui aboutissent à l'hémoglobine. Pendant toute la durée de cette maturation (cycle médullaire), les cellules absorbent ce Fer radioactif, lié à l'hémoglobine, et se divisent plusieurs fois, ce qui entraîne une répartition des quantités du Fer^* contenu dans chacune. Cette étape est représentée en C sur la figure (1).

A la fin du cycle, les nouveaux globules rouges sortent de la moelle entraînant ainsi, dans le sang circulant, le Fer radioactif absorbé (compartiment X_6 de la figure 1).

C'est la concentration du Fer marqué présent dans les globules rouges du sang circulant qui est mesurée.

Dans les cas normaux : la mort de cellules médullaires est pratiquement nulle. D'autre part, les globules rouges ont une durée de vie moyenne de plusieurs mois et la durée de l'examen est de 14 jours au maximum. Nous pouvons donc négliger les phénomènes de destruction des cellules médullaires et sanguines.

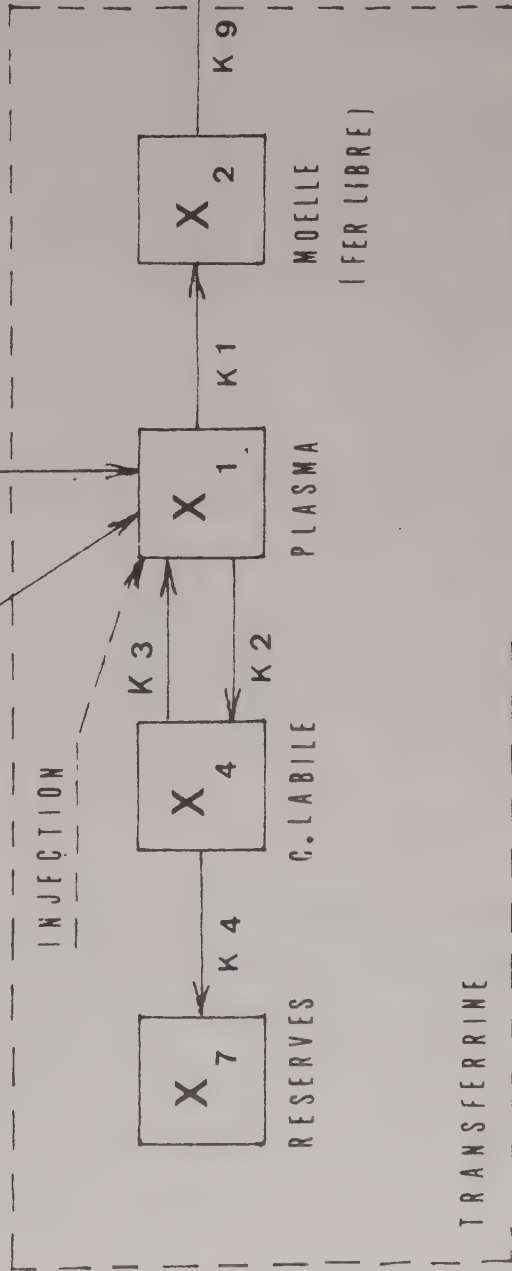
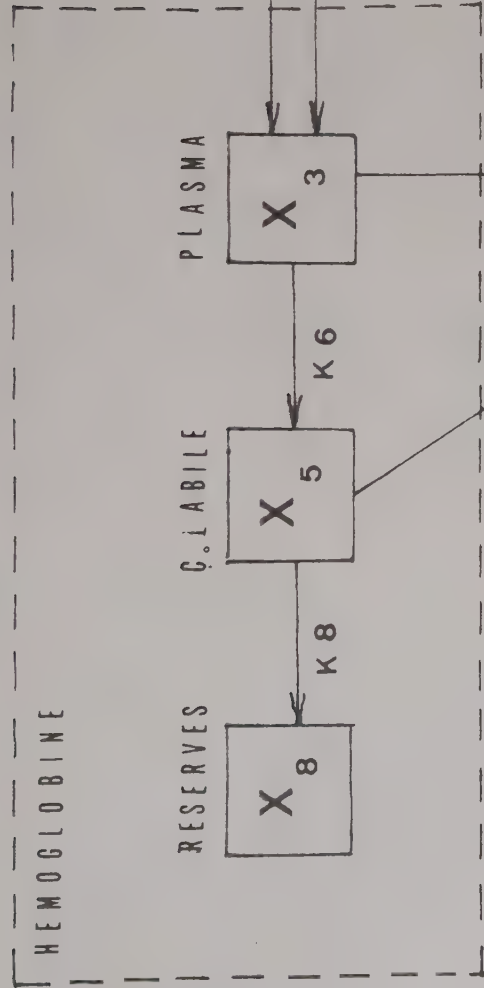
Dans les cas pathologiques : il n'en est pas de même. En effet, plusieurs anomalies peuvent se produire parfois même simultanément :

. mort intramédullaire : des cellules en cours de maturation dans la moelle sont détruites. Le Fer radioactif contenu est alors libéré sous forme hémoglobinique et, après plusieurs transformations et échanges (Fig. 1 : 4ème étape), sera réutilisé comme le Fer marqué injecté initial.

Hypothèse : Nous supposons qu'une proportion u_1 des cellules médullaires de chaque famille atteignant l'"âge" τ_A meurt. Cet "âge" τ_A coïncide avec la fin d'un stade du cycle médullaire (discontinuité de la fonction $f(\tau)$).



4° ETAPE



1° ETAPE

2° ETAPE

3° ETAPE

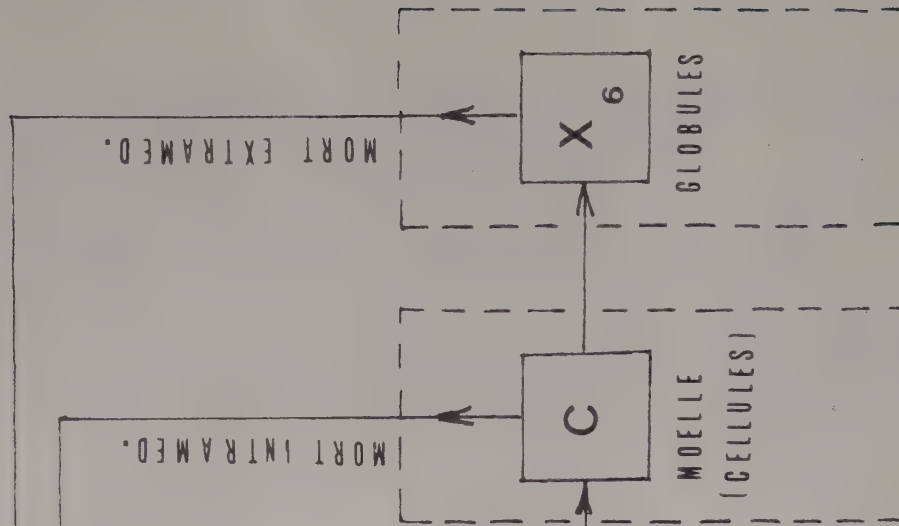
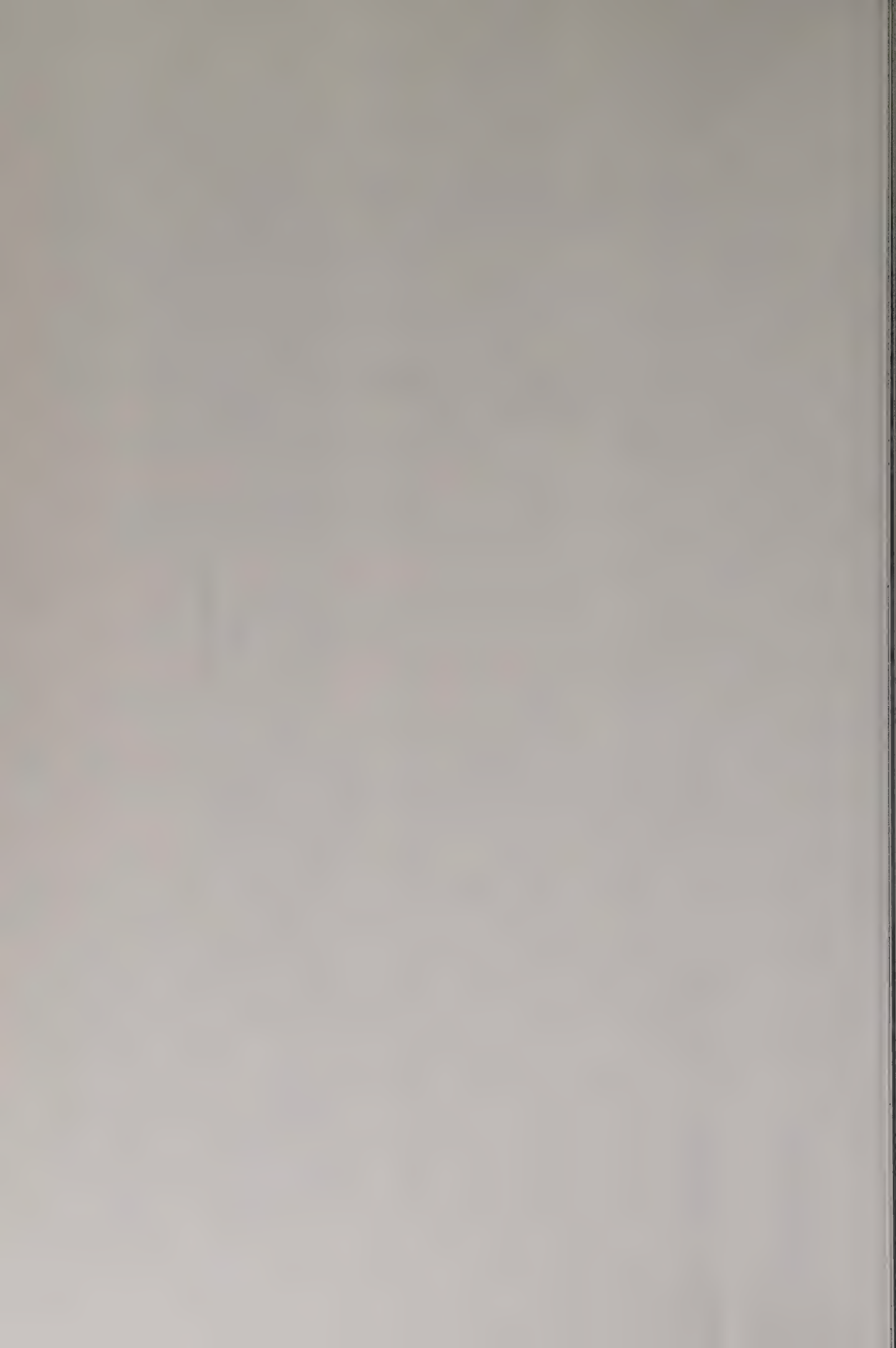


Fig. 1 Modèle de la cinétique du Fer radioactif



. mort extramédullaire : la destruction des globules rouges peut être ou non liée à leur âge. Nous distinguons donc :

- la mort extramédullaire liée à l'âge des hématies.

Hypothèse : nous supposons qu'une proportion u_4 de globules rouges meurt au bout d'un intervalle de temps u_5 compté à partir de leur maturité.

- la mort extramédullaire "au hasard"

dans ce cas, un globule "jeune" a autant de chance d'être détruit qu'un "vieux", au niveau de la rate, par exemple.

Hypothèse : nous supposons qu'une proportion u_2 de l'ensemble des globules rouges du sang circulant est détruite par unité de temps. Dans nos applications, nous avons choisi le jour comme unité de temps.

- la mort à la sortie de la moelle

c'est le cas limite entre les deux premières anomalies que nous avons ajouté pour des facilités de formulation et d'application dans les cas douteux.

Hypothèse : nous supposons qu'une proportion u_3 des globules atteignant leur maturité meurt à leur sortie de la moelle.

Dans tous les cas, le Fer radioactif libéré par les cellules médullaires et les globules qui meurent est, après libération de l'hémoglobine, utilisé à nouveau comme le Fer marqué, initialement injecté, et suit le même cycle d'échanges (fig. 1). Cette étape a été étudiée expérimentalement par le Pr Najean et son équipe : l'hémoglobine marquée, utilisée en traceur, permettant de suivre son métabolisme.

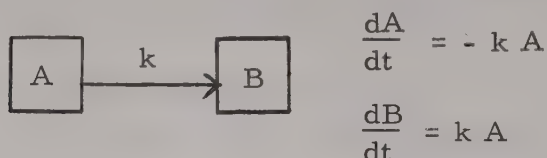
B : La formulation

Elle consiste à établir les variations au cours du temps, des quantités de Fer radioactif situé dans les différentes parties de l'organisme selon un schéma compartimental. Les cellules médullaires et les globules rouges du sang circulant constituent deux compartiments spéciaux (Fig. 1 : C pour les cellules médullaires et X_6 pour les globules rouges du sang circulant).

Pour cela nous avons dû poser des hypothèses supplémentaires.

a - Linéarité des échanges au cours de la 1ère et de la 4ème étape (fig. 1) c'est-à-dire de tous les échanges et transformations du Fer qui n'est pas contenu dans des cellules médullaires et extramédullaires.

Hypothèse : Le flux instantané de Fer marqué sortant d'un compartiment est proportionnel à la quantité alors contenue dans ce compartiment d'origine.



b - Au niveau des cellules médullaires le phénomène est plus complexe puisqu'il y a stockage et absorption continue de Fer pendant toute la maturation. Ce temps de stockage est donc variable suivant les particules de Fer selon que ces dernières sont absorbées par des cellules plus ou moins mûres.

Hypothèse : nous supposons qu'une cellule médullaire d'âge τ , absorbe entre les instants t et $(t + dt)$, une quantité de Fer :

$$dq = I(\tau) X_2(t) dt$$

$I(\tau)$ étant l'avidité de la cellule d'âge τ

$x_2(t)$ représentant la quantité de Fer disponible dans la moelle à l'instant t (second élément de la solution X du système intégral-différentiel).

Cette hypothèse permet de calculer la quantité de Fer libérée dans le sang circulant par toutes les cellules d'une famille arrivant à maturité :

$$dq = \int_0^{\theta} f_c(\tau) x_2(t - \theta + \tau) d\tau$$

où :

θ = durée du cycle médullaire (maturation dans la moelle)

$f_c(\tau)$: produit de l'avidité $I(\tau)$ cellulaire et du nombre de cellules d'une famille d'"âge" τ

$x_2(t - \theta + \tau)$: quantité de Fer disponible dans la moelle à l'instant $t - \theta + \tau$.

Difficulté : existence d'une phase transitoire ($t < \theta$)

Cette phase correspond à la période des temps inférieurs à la durée θ , du cycle médullaire. Précisons que les temps, t , sont comptés à partir de l'instant de l'injection.

En effet, les cellules qui sortent de la moelle sous forme de globules, pendant cette période, n'ont pas absorbé du Fer radioactif pendant toute leur maturation puisque cette dernière a commencé avant l'injection. C'est ce qui explique la présence d'une contrainte lors du calcul des intégrales du type :

$$\int_a^b f(\tau) x_2(t - c + \tau) d\tau$$

avec

$$\begin{cases} x_2(t - c + \tau) = 0 \\ \text{si } (t - c + \tau) \leq 0 \end{cases}$$

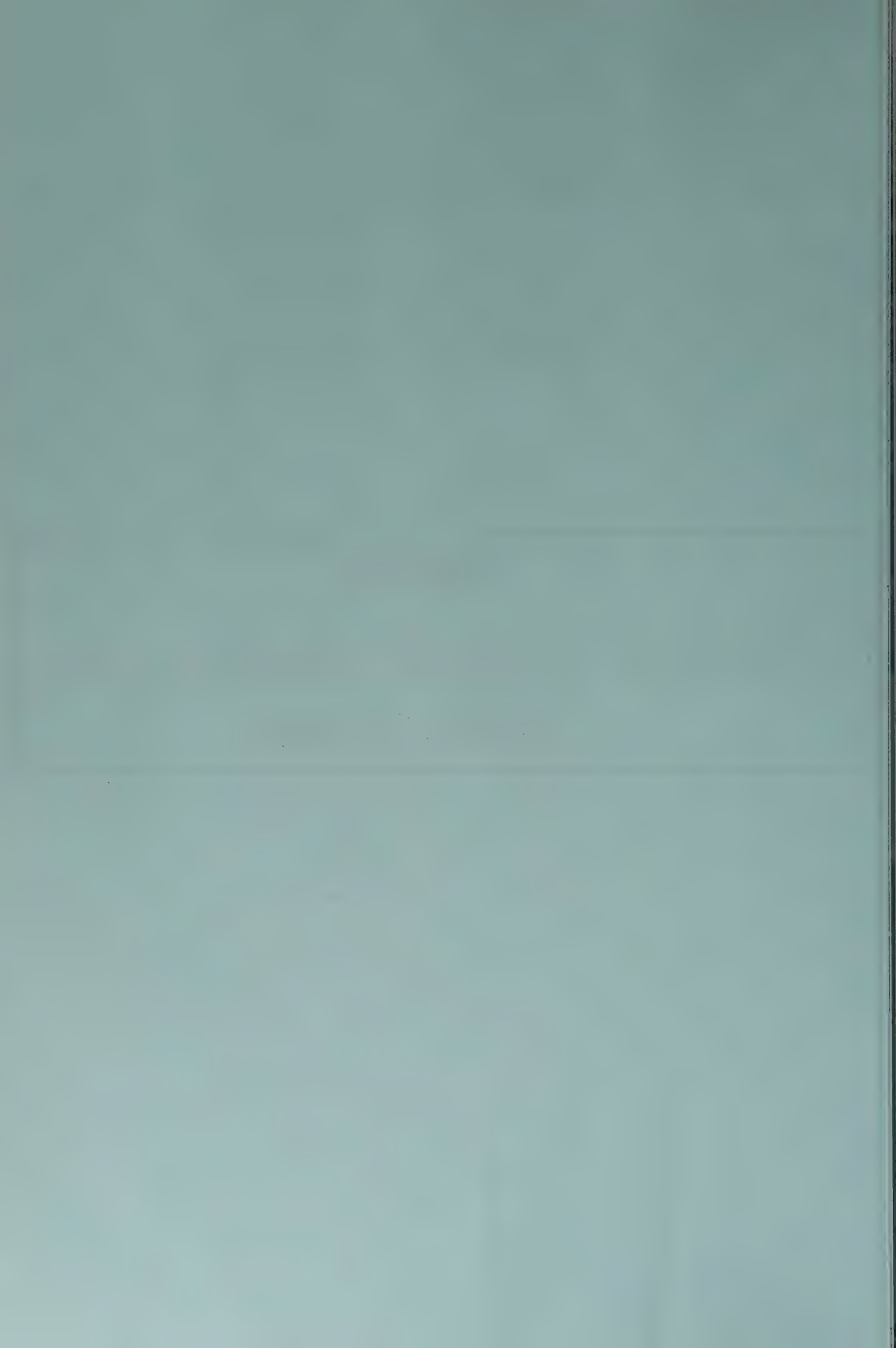
Cette contrainte alourdit naturellement les calculs. Ces derniers sont exposés au chapitre IV.

L'analyse de l'ensemble du phénomène est assez schématisée. Le lecteur intéressé par la formulation de ce phénomène physiologique trouvera certains détails complémentaires dans nos travaux antérieurs (Réf. 11, 12, 13).

CHAPITRE II

IDENTIFICATION : LA METHODE DE QUADRATISATION PARTIELLE

PRINCIPE ET APPLICATION



Le problème posé revient à chercher, dans un domaine Ω appartenant à R^n , le vecteur U qui rend minimum la fonction coût :

$$F(U) = \sum_k p_k (x_6(t_k) - \text{Mes}(t_k))^2 \quad (1)$$

$x_6(t_k)$ étant la valeur prise, pour $t = t_k$, par le sixième élément de la solution $X(t)$ du système intégral-différentiel explicité au chapitre précédent et du type :

$$\frac{d}{dt} X = B(U) \cdot X + \varphi(t, v_j) \quad (2)$$

$$\text{où : } v_j = \int_{a_j}^{b_j} f(\tau) x_2(t - c_j + \tau) d\tau \quad (3)$$

$$\text{avec } \begin{cases} x_2(w) = 0 \\ \text{si } w \leq 0 \end{cases}$$

p_k étant un facteur de pondération.

$\text{Mes}(t_k)$ étant une donnée expérimentale.

Nous sommes donc en présence d'un problème inverse. La recherche d'un minimum global est rendue difficile voire impossible par la complexité de la fonction $F(U)$ et du système intégral-différentiel étudié. Les théorèmes d'unicité existant font en effet intervenir des conditions restrictives sur la fonction et sur le domaine que nous n'avons pu vérifier (Réf. 3) Nous rechercherons donc un minimum local de la fonction, $F(U^*)$ tel que :

$$U^* \in \Omega$$

$$F(U^*) \leq F(U).$$

pour tout tableau U appartenant "au voisinage" de U^* .

I - LES METHODES DE QUADRATISATION (Rappel)

Partant d'un vecteur initial U^0 , nous recherchons une suite $U^1, U^2 \dots U^r, U^{r+1} \dots$ telle que :

$$F(U^{r+1}) < F(U^r)$$

U^* sera la limite de convergence, si elle existe, de cette suite.

Les méthodes de quadratisation consistent à approcher la fonction $F(U)$ au voisinage de chaque nouveau point U^r , par un polynôme quadratique

$$F(U) \simeq F(U^r) + P(U - U^r) + E(\|U - U^r\|)$$

$E(\|U - U^r\|)$, terme d'erreur, étant un infiniment petit du 3ème ordre au voisinage de U^r .

Cette fonction d'approximation sera, elle-même, minimum au point U^{r+1} , point de départ de l'itération suivante.

Nous distinguons trois types de méthodes de quadratisation :

- la méthode de quadratisation osculatrice
- la méthode de quadratisation par interpolation
- la méthode de quadratisation partielle.

Rappelons le principe des deux premières méthodes, la troisième, qui est celle que nous avons utilisée, fera l'objet d'un exposé spécial au paragraphe suivant.

A : La méthode de quadratisation osculatrice

Le polynôme quadratique d'approximation est donné par le développement de Taylor limité au second ordre :

$$P(U) = F(U^r) + [F'(U^r)] [U - U^r] + \frac{1}{2} [U - U^r]^T [F''(U^r)] [U - U^r] \quad (4)$$

$[F'(U^r)]$: étant le tableau des dérivées premières au point U^r , (matrice ligne)

$[F''(U^r)]$: représentant le hessien calculé au point U^r .

Le polynôme est optimum au point U^{r+1} tel que :

$$P'(U^{r+1}) = 0$$

soit :

$$[F'(U^r)] + [F''(U^r)] [U^{r+1} - U^r] = 0 \quad (5)$$

c'est-à-dire

$$U^{r+1} = U^r - [F''(U^r)]^{-1} [F'(U^r)] \quad (6)$$

Cette relation de récurrence conduit à la formation de la suite U_i .
Si celle-ci converge vers une limite U^* , nous aurons, d'après (5) :

$$F'(U^*) = 0$$

C'est ce tableau U^* qui rend donc $F(U)$ stationnaire.

D'autre part si $[F''(U^*)]$ est une matrice définie positive nous pouvons affirmer que $F(U^*)$ est un minimum local.

Cette méthode nécessite le calcul des dérivées premières et secondes de la fonction à minimiser. Or dans notre application particulière, celles-ci ne peuvent être explicitées. Les dérivées doivent elles-mêmes être approchées comme dans les deux autres méthodes de quadratisation où nous avons recours à une interpolation.

B : La méthode de quadratisation par interpolation

Le polynôme d'approximation de $F(U)$ au voisinage du point M_r correspondant au tableau U^r de l'itération (r), n'est plus le développement

limité de Taylor mais un polynôme du second degré, du type :

$$P(U) = a + [D(U^r)]^T [U - U^r] + \frac{1}{2} [U - U^r]^T [G(U^r)] [U - U^r] \quad (7)$$

Ce polynôme interpole la fonction $F(U)$ sur un support construit à partir du point M_r associé à U^r .

a) Calcul des coefficients du polynôme d'interpolation $P(U)$

Par analogie avec les cas précédent, nous imposons à la matrice carrée $[G(U^r)]$ d'être symétrique. Les conditions d'interpolation doivent permettre de déduire les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ paramètres du polynôme : a , éléments de $[D(U^r)]$ et de $[G(U^r)]$. Nous avons donc besoin de $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ points pour constituer le support d'interpolation.

Pour simplifier les calculs, nous choisissons un support particulier constitué des points suivants :

. le point M_r , associé au tableau U^r

. deux points M_{i+} et M_{i-} sur chacun des axes de base $\vec{u}_i$

soit n points M_{i+} et n points M_{i-}

. un point M_{ij} de chacun des plans de base $(\vec{u}_i, \vec{u}_j)$, soit au total $\frac{n^2 - n}{2}$ points M_{ij} .

Soient $\vec{e}_i$ les vecteurs unitaires des axes u_i et h_i des scalaires associés. Les points du support d'interpolation sont alors définis par les vecteurs suivants :

$\vec{U}^r$: pour le point M_r

$\vec{U}^{i+} = \vec{U}^r + h_i \vec{e}_i$ où $(i = 1, 2 \dots n)$ pour les points M_{i+}

$\vec{U}^{i-} = \vec{U}^r - h_i \vec{e}_i$ où $(i = 1, 2 \dots n)$ pour les points M_{i-}

$$\vec{U}^{ij} = \vec{U}^r + h_i \vec{e}_i + h_j \vec{e}_j \text{ où } (i = 1, 2 \dots n) \text{ et } (j = 1, 2 \dots n)$$

avec $(i \neq j)$ pour les points M_{ij} .

Associations aux vecteurs ci-dessus $\vec{U}^r, \vec{U}^{i+}, \vec{U}^{i-}, \vec{U}^{ij}$ les tableaux correspondant à leurs coordonnées U^r, U^{i+}, U^{i-} et U^{ij} ainsi que les tableaux :

$$\begin{aligned} V^r &= 0 \quad (\text{tous les éléments sont nuls}) \\ V^{i+} &= U^{i+} - U^r \quad (\text{éléments nuls sauf } v_i^{i+} = h_i) \\ V^{i-} &= U^{i-} - U^r \quad (\text{éléments nuls sauf } v_i^{i-} = -h_i) \\ V^{ij} &= U^{ij} - U^r \quad (\text{éléments nuls sauf } v_i^{ij} = h_i \text{ et } v_j^{ij} = h_j) \end{aligned} \quad (8)$$

Les paramètres du polynôme $P(U)$ sont calculés à partir des $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ conditions d'interpolation :

$$\begin{aligned} P(U^r) &= F(U^r) \\ P(U^{i+}) &= F(U^{i+}) \\ P(U^{i-}) &= F(U^{ij}) \\ P(U^{ij}) &= F(U^{ij}) \end{aligned} \quad (9)$$

c'est-à-dire $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ relations du type :

$$a + [D(U^r)]^T [V] + \frac{1}{2} [V]^T [G(U^r)] [V] = F(U)$$

soit :

$$a + \sum_{k=1}^n d_k^r v_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n v_j \sum_{k=1}^n g_{jk} v_k = F(U) \quad (10)$$

où $g_{jk} = g_{kj}$.

v_k et v_j étant les éléments j et k des tableaux $V^r, V^{i+}, \dots$ en fonction des points $M_i, M_{i+}, \dots$ du support.

Au point M_r , le tableau V^r est nul (8), la condition d'interpolation s'écrit donc :

$$a = F(U^r) \quad (11)$$

Aux points M_{i+} et M_{i-} , correspondant respectivement à $(U^r + h_i \vec{e}_i)$ et $(U^r - h_i \vec{e}_i)$, les éléments v_k et v_j de (10) sont les éléments de V^{i+} et V^{i-} dont les propriétés (8) conduisent aux relations :

$$\begin{aligned} a + d_i h_i + \frac{1}{2} g_{ii} h_i^2 &= F(U^r + V^{i+}) \\ a - d_i h_i + \frac{1}{2} g_{ii} h_i^2 &= F(U^r + V^{i-}) \end{aligned} \quad (12)$$

d'où :

$$d_i = \frac{F(U^r + V^{i+}) - F(U^r + V^{i-})}{2 h_i} \quad (13)$$

$$g_{ii} = \frac{F(U^r + V^{i+}) + F(U^r + V^{i-}) - 2 F(U^r)}{h_i^2} \quad (14)$$

Aux points M_{ij} associés aux tableaux $(U^r + h_i \vec{e}_i + h_j \vec{e}_j)$, nous utilisons également la condition (10) où v_j et v_k sont maintenant les éléments des tableaux V^{ij} définis en (8). La relation devient :

$$a + d_i h_i + d_j h_j + \frac{1}{2} (g_{ii} h_i^2 + 2 g_{ij} h_i h_j + g_{jj} h_j^2) = F(U^r + V^{ij})$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (12) :

$$g_{ij} = \frac{F(U^r + V^{ij}) - F(U^r + V^{i+}) - F(U^r + V^{j+}) + F(U^r)}{h_i h_j} \quad (15)$$

Les relations (11), (13), (14) et (15) permettent donc de calculer explicitement les paramètres du polynôme $P(U)$ en fonction des valeurs prises par $F(U)$ aux $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ points du support d'interpolation.

b) La recherche du minimum de $F(U)$

Elle s'effectue, comme dans le cas de la méthode de quadratisation osculatrice, en formant une suite de tableaux : $U_1, U_2 \dots U_r, U_{r+1} \dots$ dont chacun correspond à l'optimum du polynôme d'interpolation de l'itération en cours :

$$P(U) = a + [D(U^r)]^T [U - U^r] + \frac{1}{2} [U - U^r]^T [G(U^r)] [U - U^r]$$

Cet optimum est obtenu pour $U = U^{r+1}$, tel que :

$$P'(U^{r+1}) = 0$$

c'est-à-dire :

$$[D(U^r)] + [G(U^r)] [U^{r+1} - U^r] = 0$$

U^{r+1} est donc déduit de U^r par la formule de récurrence :

$$U^{r+1} = U^r - [G(U^r)]^{-1} [D(U^r)] \quad (16)$$

qui permet de former la suite des tableaux $U^1, U^2 \dots$ dont la limite de convergence, si elle existe, sera prise comme solution U^* associée à l'optimum local $F(U^*)$.

Remarque 1 :

Si les scalaires h_i tendent vers zéro, nous constatons d'après les formules (13, 14 et 15), que les matrices $[D(U^r)]$ et $[G(U^r)]$ tendent respectivement vers les tableaux $[F'(U^r)]$ des dérivées premières et vers le hessien $[F''(U^r)]$. Nous retrouvons alors la méthode de quadratisation osculatrice, les dérivées ayant des valeurs approchées obtenues par méthode numérique.

Remarque 2 :

Si $[G(U^r)]$ est une matrice définie positive, nous pouvons écrire :

$$[U^{r+1} - U^r]^T [G (U^r)] [U^{r+1} - U^r] > 0$$

Or la relation de récurrence peut s'écrire :

$$[U^{r+1} - U^r]^T [D (U^r)] + [U^{r+1} - U^r]^T [G (U^r)] [U^{r+1} - U^r]$$

Elle entraîne donc l'inégalité :

$$[U^{r+1} - U^r]^T [D (U^r)] < 0.$$

Si les scalaires h_i sont suffisamment petits, $D (U^r)$ peut être considéré comme le tableau des dérivées premières de $F (U)$ ou de $P (U)$. Nous pouvons donc déduire de cette inégalité que :

$$P (U^{r+1}) < P (U^r)$$

c'est-à-dire, si l'approximation polynomiale est satisfaisante :

$$F (U^{r+1}) < F (U^r)$$

Nous améliorons donc le résultat à chaque itération.

En général, $[G (U^r)]$ n'est pas une matrice définie positive à chaque itération, le résultat d'une itération peut donc être moins bon que celui de la précédente. Aussi avons nous préféré utiliser la méthode de quadratisation partielle qui, elle, est une méthode de "descente certaine". Nous en développons le principe dans la suite de ce chapitre.

II - LA METHODE DE QUADRATISATION PARTIELLE - PRINCIPE

Cette méthode a déjà fait l'objet de plusieurs exposés et travaux (Réf. 8, 17). Nous en rappelons le principe.

Elle est obtenue à partir des méthodes précédentes après modifications de celles-ci qui les transforment en méthode de "descente certaine". A chaque itération nous recherchons U^{r+1} tel que

$$F (U^{r+1}) < F (U^r)$$

Pour cela, nous approchons toujours $F(U)$ par un polynôme quadratique obtenu par interpolation

$$F(U) = P(U) + E(h_i, \|U - U^r\|)$$

avec :

$$P(U) = a + [D(U^r)]^T [U - U^r] + \frac{1}{2} [U - U^r]^T [G(U^r)] [U - U^r]$$

le terme d'erreur $E(h_i, \|U - U^r\|)$ dépendant de l'écart $[U - U^r]$ mais aussi du support d'interpolation par l'intermédiaire des scalaires h_i (voir I. B. a).

Nous avons évoqué au paragraphe précédent l'intérêt d'obtenir une matrice définie positive pour $[G(U^r)]$; cela nous conduit à poser deux propositions :

Proposition 1 :

Si $[G(U^r)]$ est définie positive, il est possible de trouver, à partir de U^r , une direction de descente $[U^* - U^r]$ et un point sur celle-ci

$$U^{r+1} = U^r + \lambda (U^* - U^r)$$

tel que :

$$F(U^{r+1}) < F(U^r)$$

Proposition 2 :

Si $[G(U^r)]$ n'est pas définie positive mais si l'on peut extraire un sous espace R^p de R^n tel que la matrice $[G^p(U^r)]$ correspondante soit définie positive, l'on peut trouver également une direction de descente $[U' - U^r]$ et un point

$$U^{r+1} = U^r + \lambda (U' - U^r)$$

tel que

$$F(U^{r+1}) < F(U^r)$$

Cela revient à considérer comme des constantes pendant l'itération en cours, les variables u_i qui appartiennent à R^n mais non à R^p .

Pour rechercher ce sous espace R^p , nous utilisons une extension de la méthode de Choleski : que nous rappelons au paragraphe (III).

Reprenons ces deux propositions et envisageons les deux cas selon que $[G(U^r)]$ est ou n'est pas une matrice définie positive.

1er cas : La matrice $[G(U^r)]$ définie dans R^n est strictement positive

Le polynôme $P(U)$ d'interpolation admet alors un optimum local au point U^* , tel que :

$$P'(U^*) = 0$$

$$\text{soit : } [D(U^r)] + [G(U^r)] [U^* - U^r] = 0$$

c'est-à-dire :

$$[D(U^r)] = - [G(U^r)] [U^* - U^r] \quad (17)$$

La direction $(U^* - U^r)$ est-elle une direction de descente ?

Considérons un point U de cette direction, compris entre U^* et U^r :

$$U = U^r + \lambda (U^* - U^r) \quad \text{avec } 0 < \lambda \leq 1 \quad (18)$$

La relation initiale s'écrit :

$$\begin{aligned} F(U) = F(U^r) + [D(U^r)]^T [U - U^r] + \frac{1}{2} [U - U^r]^T [G(U^r)] [U - U^r] \\ + E(h_i, \|U - U^r\|) \end{aligned} \quad (19)$$

Or, d'après (17), puisque $[G (U^r)]$ est symétrique :

$$[D (U^r)]^T = - [U^* - U^r] [G (U^r)] \quad (20)$$

Remplaçons $[U^* - U^r]$ et $[D (U^r)]^T$ par les expressions obtenues en (18) et (20) dans l'équation initiale (19) :

$$\begin{aligned} F (U) = & F (U^r) - \lambda [U^* - U^r]^T [G (U^r)] [U^* - U^r] \\ & + \frac{1}{2} \lambda^2 [U^* - U^r]^T [G (U^r)] [U^* - U^r] + E (h_i, \lambda (U^* - U^r)) \end{aligned}$$

soit :

$$F(U) - F(U^r) = - \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2} \right) [U^* - U^r]^T [G (U^r)] [U^* - U^r] + E (h_i, \lambda (U^* - U^r)) \quad (21)$$

Etudions le signe de $F (U) - F (U^r)$:

. Comme $[G (U^r)]$ est une matrice définie positive :

$$[U^* - U^r]^T [G (U^r)] [U^* - U^r] > 0$$

De plus :

$$0 < \lambda \leq 1 :$$

$$\lambda - \frac{\lambda^2}{2} > 0$$

Le premier terme est donc négatif :

$$- \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2} \right) [U^* - U^r]^T [G (U^r)] [U^* - U^r] < 0$$

. Le comportement de $E (h_i, U - U^r)$ est mal connu si l'on s'éloigne de U^r . Mais au voisinage de U^r , "centre" de l'interpolation, la fonction $F (U)$ peut être donnée par son développement de Taylor :

$$\begin{aligned} F(U) = & F(U^r) + [F'(U^r)]^T [U - U^r] + \frac{1}{2} [U - U^r]^T [F''(U^r)] [U - U^r] \\ & + E' (\| U - U^r \|^3) \end{aligned} \quad (22)$$

où : $E' (\| U - U^r \|^3)$, le terme d'erreur, est du 3ème ordre en $(U - U^r)$.

Or, nous avons vu que si les scalaires h_i , introduits lors de la définition du support d'interpolation, tendaient vers des valeurs nulles, les matrices $[D(U^r)]$ et $[G(U^r)]$ tendaient respectivement vers la matrice des dérivées premières et vers le hessien :

$$\begin{aligned} [D(U^r)] &\longrightarrow [F'(U^r)] \\ [G(U^r)] &\longrightarrow [F''(U^r)] \end{aligned}$$

La comparaison des deux formes (19) et (22) de $F(U)$ montre donc que si les points M_i et M_{ij} du support sont "suffisamment" rapprochés, le terme de l'erreur d'interpolation tend vers le terme d'erreur du développement de Taylor, c'est-à-dire vers un terme du 3ème ordre en $(U - U^r)$:

$$E(h_i, (U - U^r)) \longrightarrow E'(\|U - U^r\|^3).$$

Or :

$$[U - U^r] = \lambda [U^* - U^r]$$

Au voisinage de U^r , c'est-à-dire pour λ suffisamment petit, le terme d'erreur d'interpolation devient donc du 3ème ordre en λ :

$$E(h_i, [U - U^r]) \longrightarrow E'(\lambda^3 \|U^* - U^r\|^3).$$

Lorsque les valeurs de λ et des scalaires h_i sont "suffisamment" faibles, la relation 22 s'écrit donc :

$$F(U) - F(U^r) = -(\lambda - \frac{\lambda^2}{2}) [U^* - U^r]^T [G(U^r)] [U^* - U^r] + E(\lambda^3 \|U - U^r\|^3) \quad (23)$$

Le premier membre prend alors, le signe du premier terme qui est du premier ordre en λ . D'où :

$$F(U) - F(U^r) < 0$$

La direction $(U^* - U^r)$ est, dans ces conditions, une direction de descente. Nous prendrons comme résultat de l'itération en cours, l'un de ces points de cette direction :

$$U^{r+1} = U^r + \lambda [U^* - U]$$

Mais quelle valeur faut-il donner à λ ?

Le raisonnement précédent n'est valable qu'au "voisinage" de U^r c'est-à-dire si λ est "suffisamment" petit. La fonction $F(U^r)$ étant trop compliquée, nous ne pouvons espérer fixer mathématiquement une limite de λ à partir de laquelle nous aurions obligatoirement :

$$F(U) < F(U^r)$$

Aussi avons nous recours à une méthode plus empirique qui consiste à essayer successivement les valeurs de λ égales à $\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \dots$ jusqu'au moment où cette inégalité est vérifiée.

2ème cas : La matrice $[G(U^r)]$ définie dans R^n , n'est pas une matrice
définie positive

Partant de cette matrice initiale, symétrique, $[G(U^r)]$, la méthode consiste à supprimer un certain nombre de lignes et les colonnes de même indice, afin de rendre la matrice constituée des éléments qui subsistent, $[G^P(U^r)]$, définie positive.

Une méthode de détermination de l'ensemble K des indices des lignes et colonnes à supprimer a déjà été exposée (Réf. 8,17). Nous en rappelons le principe à la fin de ce chapitre.

Appelons :

. U^P : le vecteur déduit de U en supprimant les éléments d'indice appartenant à K . (projection de U dans un sous espace R^P).

. U' : le vecteur défini dans R^n tel que :

$$U'_i = U^r_i \quad \text{pour } i \in K$$

$$U'_i = U^P_i = U^r_i \quad \text{pour } i \notin K$$

Nous pouvons vérifier, dans ces conditions, quel que soit U' , que :

$$[U' - U^r]^T [G(U^r)] [U' - U^r] = [U^p - [U^p]^r]^T [G^p(U^r)] [U^p - U^r] \quad (25)$$

Puisque $[G^p(U^r)]$ est définie positive, le signe du premier membre est également connu :

$$[U' - U^r]^T [G(U^r)] [U' - U^r] > 0 \quad (26)$$

Application de cette propriété à notre problème :

Supposons que l'on puisse extraire ce sous-espace R^p de R^n , c'est-à-dire déterminer l'ensemble K des indices des lignes et colonnes à supprimer pour obtenir une matrice $[G^p(U^r)]$ définie positive.

Peut-on trouver un vecteur U' dont les propriétés sont définies ci-dessus, tel que :

$$F(U') < F(U^r)$$

Il s'agit donc de déterminer les éléments u'_i de U' dont l'indice i n'appartient pas à K , c'est-à-dire les éléments de U^p . Les autres éléments restent constants pendant toute l'itération :

$$U'_i = U^r_i \quad \text{si } i \in K$$

Approximons $F(U')$ par un polynôme d'interpolation construit à partir du support constitué des $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ points suivants :

- . 1 point initial, M_r , correspondant à U^r
- . p points M_{i+} correspondant à $(\vec{U}_r + h_i \vec{e}_i)$ où $i \notin K$
- . p points M_{i-} correspondant à $(\vec{U}_r - h_i \vec{e}_i)$ où $i \notin K$
- . $\frac{p^2 - p}{2}$ points M_{ij} correspondant à $(\vec{U}_r + h_i \vec{e}_i + h_j \vec{e}_j)$ où $\begin{cases} i \notin K \\ j \notin K \end{cases}$

Ce polynôme s'écrit :

$$P(U') = F(U^r) + [D^p(U^r)]^T [U^p - [U^p]^r] + \frac{1}{2} [U^p - [U^p]^r]^T [G^p(U^r)] [U^p - (U^p - [U^p]^r)] \quad (27)$$

Si λ est suffisamment faible, c'est le premier terme du second membre qui impose son signe et :

$$F(U') < F(U^r) \quad (31)$$

Ici, aussi, nous essayons successivement pour λ les valeurs égales à 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$... jusqu'au moment où l'inégalité (31) est vérifiée.

La première valeur satisfaisante rencontrée sera celle qui servira à calculer le tableau résultant de l'itération en cours :

$$U^{r+1} = U^r + \lambda (U^{P*} - U^r)$$

C'est cette méthode de "descente certaine" que nous avons choisie pour notre problème particulier.

L'application en est décrite au paragraphe (IV) ; auparavant, nous rappelons la méthode d'extraction du sous-espace R^P qui est employée. Cette dernière permet de résoudre simultanément le système (28) donnant U^{P*} :

$$[D^P(U^r)] + [G^P(U^r)] [U^{P*} - [U^P]^r] = 0$$

III - EXTRACTION DU SOUS ESPACE R^P de R^n

Il s'agit de rechercher le sous-espace R^P de R^n tel que la matrice symétrique $[G^P(U^r)]$ soit définie positive

Cette méthode est une extension de la décomposition de Choleski d'une matrice symétrique en deux matrices triangulaires. Elle a été décrite précédemment par J. Légras (Réf. 8).

A : Décomposition d'une matrice symétrique en deux matrices triangulaires

Rappel de la méthode de Choleski.

Soit $[G]$ une matrice symétrique d'ordre n , définie positive, cherchons la matrice triangulaire inférieure $[S]$ telle que :

$$[S] \cdot [S]^T = [G]$$

soit en explicitant :

$$\begin{bmatrix} s_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ s_{21} & s_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{i1} & s_{i2} & \dots & s_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{ni} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{21} & \dots & s_{j1} & \dots & s_{n1} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{j2} & \dots & s_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{ji} & \dots & s_{ni} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{jj} & \dots & s_{nj} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1j} & \dots & g_{1n} \\ g_{12} & g_{22} & \dots & g_{2j} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{1i} & g_{2i} & \dots & g_{ij} & \dots & g_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{1j} & g_{2j} & \dots & g_{jj} & \dots & g_{jn} \\ g_{1n} & g_{2n} & \dots & g_{jn} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

L'identification des éléments conduit aux $\frac{n^2 + n}{2}$ relations :

$$\sum_{k=1}^i s_{ik} s_{jk} = g_{ij} \quad i \leq j \leq n \quad (32)$$

Utilisons la 1^{ère} ligne, (ou 1^{ère} colonne) de $[G]$:

$$s_{11}^2 = g_{11}$$

$$s_{j1} s_{11} = g_{1j} \quad \text{où } j = 2, 3 \dots n$$

d'où :

$$s_{11} = \pm \sqrt{g_{11}} \quad \text{si } g_{11} > 0$$

$$s_{j1} = \frac{g_{1j}}{s_{11}} \quad \text{où } j = 2, 3 \dots n$$

Pour les éléments de la seconde ligne de $[G]$:

g_{12} a été utilisé ci-dessus

$$s_{21}^2 + s_{22}^2 = g_{22}$$

$$s_{21} s_{j1} + s_{22} s_{j2} = g_{2j} \quad \text{où } j = 3, 4 \dots n$$

Les éléments s_{j1} étant déterminés ci-dessus, nous pouvons en déduire

$$s_{22} = \pm \sqrt{g_{22} - s_{21}^2} \quad \text{si } g_{22} - s_{21}^2 > 0$$

$$s_{j2} = \frac{g_{2j} - s_{21} s_{j1}}{s_{22}} \quad \text{où } j = 3, 4 \dots n$$

Pour les éléments de la ligne (i) de $[G]$: le processus se poursuit :

. nous connaissons, à cette étape, tous les éléments s_{ik} tels que :

$$k < i$$

. les autres éléments sont donnés par les relations :

$$s_{ii} = \pm \sqrt{g_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik}^2} \quad \text{si } (g_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik}^2) > 0$$

$$s_{ji} = \frac{g_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik} s_{jk}}{s_{ii}} \quad \text{où } j = i+1, \dots n$$

Tous les éléments de $[S]$ peuvent donc être déterminés si les inégalités rencontrées sont satisfaites :

$$g_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik}^2 > 0$$

Remarque : La décomposition d'une matrice symétrique en deux matrices triangulaires transposées n'est possible que si cette matrice est définie positive. En effet le produit d'une matrice par sa transposée conduit obligatoirement à une matrice définie positive.

B : Détermination de R^p sous espace de R^n

Nous voulons construire à partir d'une matrice symétrique $[G (U^r)]$ de dimension $n \times n$, une matrice $G' (U^r)$ définie positive de dimension $p \times p$ avec $p \leq n$.

Partant de la remarque précédente selon laquelle le produit de deux matrices transposées conduit à une matrice définie positive et du fait que la méthode de Choleski permet de décomposer une matrice symétrique en deux matrices triangulaires transposées, nous passons par l'intermédiaire de ces deux matrices triangulaires. Celles-ci nous permettent en effet de déduire en outre la solution du système de notre problème :

$$D^p (U^r) + [G^p (U^r)] [U^{p*} - [U^p]^r] = 0$$

Reprenons le calcul de la décomposition de Choleski d'une matrice $[G]$ symétrique de dimension $(n \times n)$ en analysant les contraintes de calcul soulevées.

L'utilisation des éléments de la première ligne de $[G]$ conduisait aux relations :

$$s_{11}^2 = g_{11} \quad (\text{où } j = 2, 3 \dots n).$$

$$s_{j1} s_{11} = g_{1j}$$

1er cas :

$g_{11} > 0$: les calculs sont possibles :

$$1 \notin K$$

$$s_{11} = \pm \sqrt{g_{11}}$$

$$s_{j1} = \frac{g_{1j}}{s_{11}} \quad (\text{où } j = 2, 3 \dots n)$$

2ème cas :

$g_{11} \leq 0$: les calculs ne sont pas possibles. Supprimons la

1ère ligne et la 1ère colonne de la matrice initiale pour former $[G^p]$:

$$1 \in K$$

Les éléments de la seconde ligne de $[G]$ conduisaient aux relations

$$s_{21}^2 + s_{22}^2 = g_{22}$$

$$s_{21} s_{j1} + s_{22} s_{j2} = g_{2j} \quad \text{où } j = 3, 4, \dots, n$$

Reprenons successivement les deux cas précédents concernant la 1ère ligne.

1er cas : $g_{11} > 0$ $1 \notin K$ détermination de $s_{11}, s_{21} \dots s_{n1}$

Deux possibilités sont à envisager :

$$1^\circ \quad (g_{22} - s_{21}^2) > 0 :$$

les calculs sont alors possibles :

$$2 \notin K$$

$$s_{22} = \pm \sqrt{g_{22} - s_{21}^2}$$

$$s_{j2} = \frac{g_{2j} - s_{21} s_{j1}}{s_{22}} \quad j = 3, 4, \dots, n$$

$$2^\circ \quad (g_{22} - s_{21}^2) \leq 0 :$$

$$2 \in K$$

la ligne et la colonne (2) sont supprimées.

2ème cas : $g_{11} \leq 0$ $1 \in K$ (ligne (1) et colonne (1) supprimées)

Les possibilités analogues se présentent :

$$1^\circ \quad g_{22} > 0 :$$

$$2 \notin K$$

$$s_{22} = \pm \sqrt{g_{22}}$$

$$s_{j2} = \frac{g_{2j}}{s_{22}} \quad j = 3, 4 \dots n$$

2° $g_{22} < 0$:

$$2 \notin K$$

la ligne et la colonne (2) sont supprimées.

Plus généralement les éléments de la ligne (i) de [G] conduisaient

aux relations :

$$\sum_{k=1}^{i-1} (s_{ik}^2) + s_{ii}^2 = g_{ii} \quad (34)$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} (s_{ik} s_{jk}) + s_{ii} s_{ji} = g_{ij} \quad j = i+1, i+2, \dots n$$

Deux cas se présentent selon que toutes les lignes (et colonnes) d'indice inférieur à i aient été supprimées ou que l'une au moins d'entre elles ait été retenue.

1er cas : toutes les lignes précédentes, d'indice inférieur à i, ont été supprimées. Les éléments correspondant des matrices triangulaires ne peuvent être retenus, et les équations déduites de la ligne i se réduisent à :

$$s_{ii}^2 = g_{ii}$$

$$s_{ii} s_{ji} = g_{ij} \quad j = i+1, i+2, \dots n$$

Deux possibilités se présentent :

$g_{ii} > 0$: les calculs sont possibles

$$i \notin K$$

$$s_{ii} = \pm \sqrt{g_{ii}}$$

$$s_{ji} = \frac{g_{ij}}{s_{ii}} \quad j = i+1, i+2 \dots n$$

$g_{ii} \leq 0$: la ligne et la colonne d'indice (i) sont supprimées.

$$i \in K$$

2ème cas : Une ou plusieurs lignes d'indice inférieur à (i) ont été retenues. Nous utiliserons les formules (34) en conservant uniquement les éléments qui ne correspondent pas à des lignes de [G] supprimées c'est-à-dire ceux dont aucun indice ne fait partie de K.

Deux possibilités :

1°

$$g_{ii} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^{i-1} s_{ik}^2 > 0 : \text{les calculs sont effectués :}$$

$$i \notin K$$

$$s_{ii} = \sqrt{g_{ii} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^{i-1} s_{ik}^2}$$

$$s_{ji} = \frac{g_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik} s_{jk}}{s_{ii}} \quad \text{où } k \notin K$$

$j = i+1, i+2 \dots n$

2°

$$g_{ii} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^{i-1} s_{ik}^2 \leq 0$$

la ligne et la colonne (i) sont supprimées
et :

$$i \in K$$

Cette méthode nous permet donc de déduire une matrice [G^P] définie positive de la matrice initiale par suppression de lignes et de colonnes.

Si aucun élément diagonal de la matrice initiale [G] n'est positif, l'ensemble K comprend les n indices et il est impossible de trouver ainsi une matrice définie positive et d'extraire le sous espace R^P cherché.

En pratique nous n'avons jamais rencontré ce cas, une centaine de matrices ayant été traitées jusqu'à présent au cours des applications de notre problème particulier.

La matrice définie positive [G^P] se déduit donc des matrices triangulaires, S^P , ainsi formées :

$$[G^P] = [S^P] [S^P]^T$$

Remarque : Cette matrice est utilisée dans le système linéaire (28) :

$$[D^P (U^r)] + [G^P (U^r)] [U^{P*} - U^r] = 0$$

dont il s'agit de trouver la solution U^{P*} .

La décomposition de [$G^P (U^r)$] en deux matrices triangulaires, étant déjà effectuée, la résolution de ce système se réduit à la résolution immédiate de deux systèmes triangulaires suivant la méthode classique.

IV - APPLICATION DE LA METHODE DE QUADRATISATION PARTIELLE

L'utilisation de la méthode de quadratisation partielle pour minimiser une fonction $F(U)$ nous conduit à considérer les différentes phases (voir fig. 2 : pag. 42)

- l'initialisation du vecteur U_0^n des n inconnues du problème
- le calcul de la suite de vecteurs U_i tels que :

$$F(U_{i+1}) < F(U_i)$$

qui comprend :

. la construction des matrices $[D^n (U_i)]$ et $[G^n (U_i)]$ du polynôme d'interpolation (7).

. l'extraction du sous espace R^P de R^n tel que :

$[G^P (U_i)]$ soit définie positive.

. Le calcul de $[U^{P*}]$ par résolution du système :

$$[D^P (U_i)] + [G^P (U_i)] [U^{P*} - U_i^P] = 0$$

. La décomposition éventuelle, en cas de non amélioration, de $[U^{P*} - U_i^P]$ par un système de bipartitions

$$U^P - U_i^P = \lambda (U^{P*} - U_i^P)$$

où $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots$ jusqu'au moment où :

$$F(U) < F(U_i).$$

La première valeur satisfaisante rencontrée sera prise pour U_{i+1} , résultat de l'itération en cours.

Des tests d'arrêt d'exécution du programme sont prévus en différents niveaux du calcul :

- extraction impossible du sous espace R^P
- nombre maximum de bipartitions ou d'itérations
- stationnarité : trop faibles variations de U et de $F(U)$ au cours de plusieurs itérations successives
- limite de convergence des résultats (précision souhaitée).

Reprenons, en détails, tous ces cas :

1° - Extraction impossible du sous espace R^P correspondant à une
matrice $[G^P (U_i)]$ définie positive. Elle se produit lorsque

la matrice $[G(U_i)]$ de dimension $(n \times n)$ a tous ses termes diagonaux négatifs ou nuls.

Dans ce cas, nous tentons, dans notre programme un "rattrapage" :

. Si l'itération (i) en cours n'est pas la première

nous essayons des points intermédiaires de la direction $(U_i - U_{i-1})$

$$U = U_{i-1} + \lambda' (U_i - U_{i-1})$$

où : U_{i-1} et U_i sont les valeurs obtenues, pour le tableau des inconnues, à la fin des deux itérations précédentes.

λ' prend successivement les valeurs $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots$ jusqu'au moment où l'on peut extraire un sous espace R^P tel que $[G^P(U)]$ soit définie positive. Ce tableau U remplacera U_i dans la suite des calculs.

Test d'arrêt : l'exécution du programme s'arrête si un nombre maximum (K1M) de bipartitions est effectué sans qu'un sous espace R^P ait pu être extrait de R^n . (STOP1 de l'organigramme Fig. 2 (p. 42) où cette correction n'a pas été détaillée).

. Si l'itération est la première, cette modification de U_i est impossible. Un changement automatique de ces valeurs initiales est alors possible à l'utilisateur, le programme choisissant entre les tableaux :

$$\begin{aligned} U'_o &= U_o (1 + \alpha) \\ \text{et} \quad U''_o &= U_o (1 - \alpha) \end{aligned}$$

celui qui correspond à la valeur la plus faible de la fonction $F(U)$.

Un nombre maximum (K3M) de modifications des données initiales est prévu au bout duquel l'exécution du programme s'arrête si l'on ne peut extraire un sous espace R^P de R^n et une

matrice $[G^P (U)]$ définie positive (STOP 3 de l'organigramme)

2° - Nombre maximum de bipartitions de l'intervalle $(U^* - U_i)$ au bout
duquel on ne peut améliorer $F (U)$:

Si le tableau U^* obtenu après l'extraction de la matrice $[G^P (U)$ définie positive par résolution du système (28), ne satisfait pas l'inégalité

$$F (U^*) < F (U_i)$$

nous avons vu que nous cherchions un point intermédiaire satisfaisant sur la direction $(U^* - U_i)$

$$U = U_i + \lambda (U^* - U_i)$$

où $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots$ jusqu'à vérification de l'inégalité :

$$F (U) < F (U_i)$$

L'exécution du programme s'arrête au bout d'un nombre (K2M) de tentatives infructueuses. (STOP 2 de l'organigramme).

3° - Nombre maximum d'itérations :

Un nombre (ITM) maximum d'itérations provoque l'arrêt de l'exécution des calculs (STOP 5 de l'organigramme).

4° - Stationnarité des résultats de $F (U_i)$:

Des variations trop faibles de la fonction $F (U_i)$, associées à de faibles différences trop fortes des inconnues U_i , au cours de plusieurs itérations successives, traduisent une "indétermination pratique" des résultats.

Les calculs s'arrêtent au bout d'un nombre maximum (K4M) d'itérations successives où les deux inégalités sont vérifiées :

$$\left| \frac{F(U_{i+1}) - F(U_i)}{F(U_i)} \right| < \varepsilon_4$$

$$\|U_{i+1} - U_i\| > \varepsilon_1$$

Cet arrêt particulier est représenté par STOP 4 sur l'organigramme et dans le programme.

5° - Limite de convergence des résultats

Cette limite est atteinte lorsque $F(U)$ et U deviennent stationnaires au cours d'itérations successives.

$$\left| \frac{F(U_{i+1}) - F(U_i)}{F(U_i)} \right| < \varepsilon_4$$

$$\|U_{i+1} - U_i\| < \varepsilon_1$$

C'est cette valeur limite de U que nous adopterons comme solution. (STOP 5 de l'organigramme).

Remarque : Introduction de contraintes.

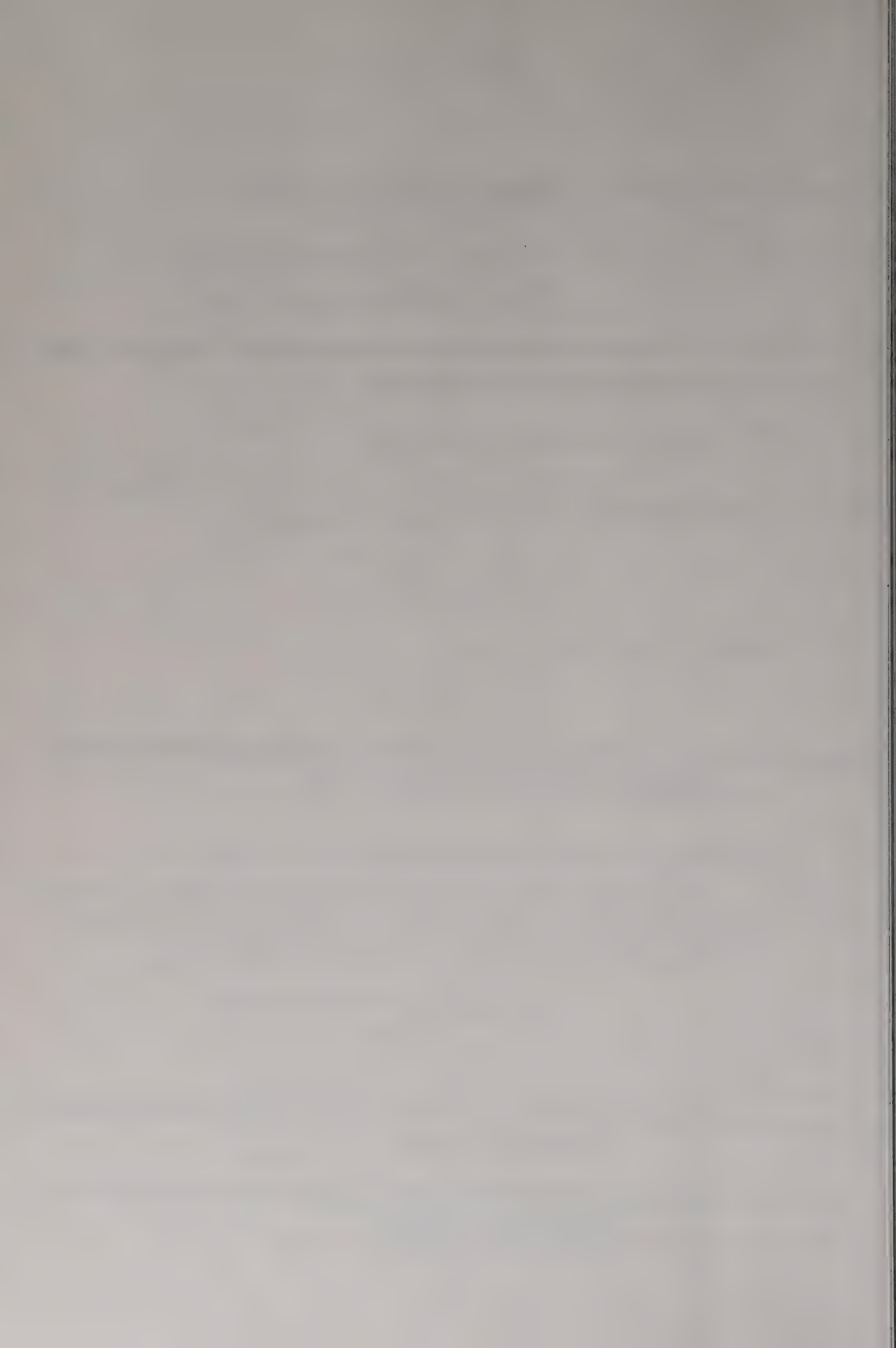
La définition des inconnues de notre problème impose à certaines d'entre elles une borne inférieure et une borne supérieure. Le tableau U de ces inconnues doit donc satisfaire une contrainte de la forme :

$$U_{\text{inf}} \leq U \leq U_{\text{sup}}$$

où :

U_{inf} : est le tableau des bornes inférieures qui sont des constantes connues numériquement.

U_{sup} : est le tableau des bornes supérieures qui sont également des constantes connues.



ORGANIGRAMME DE PRINCIPLE

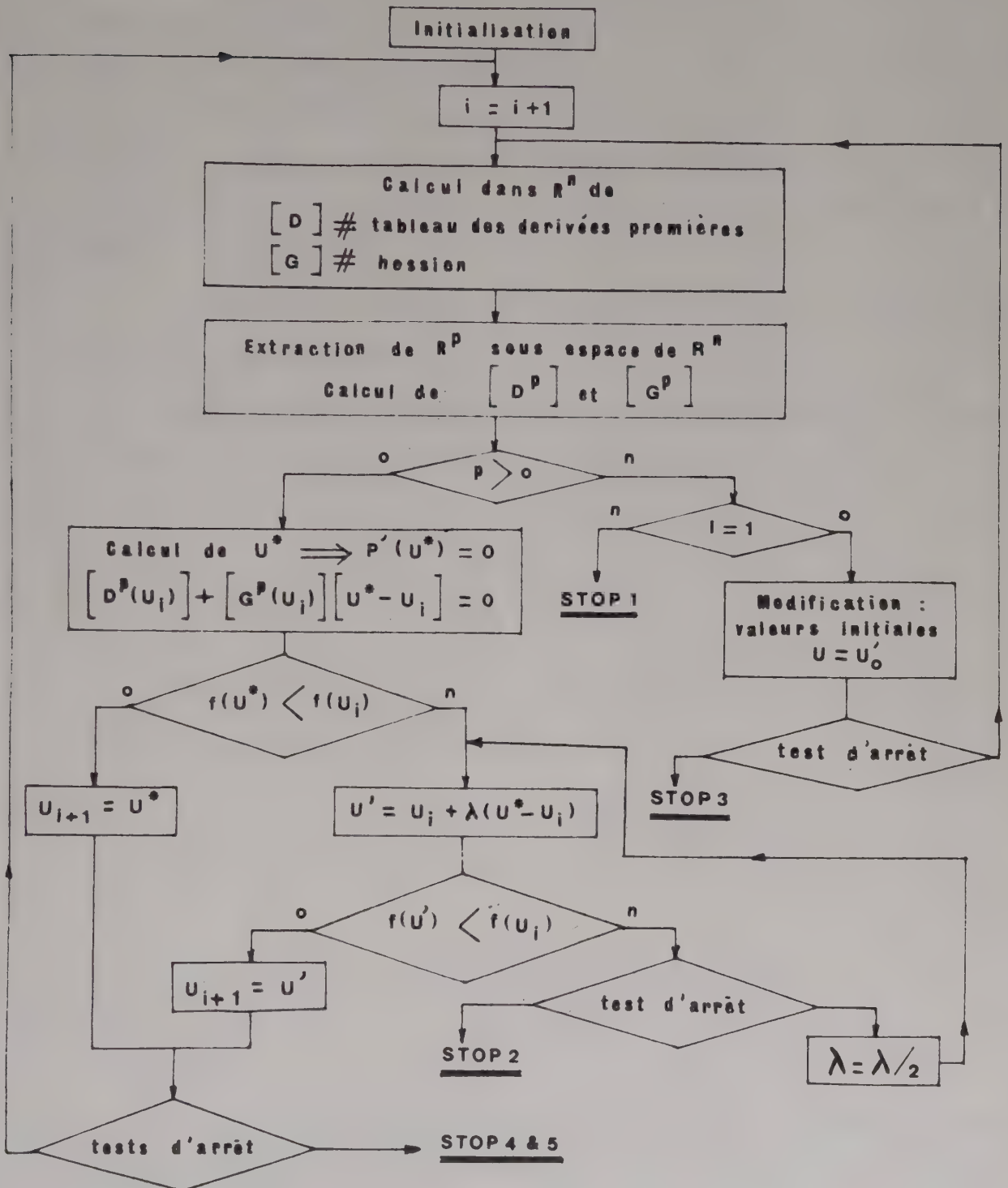
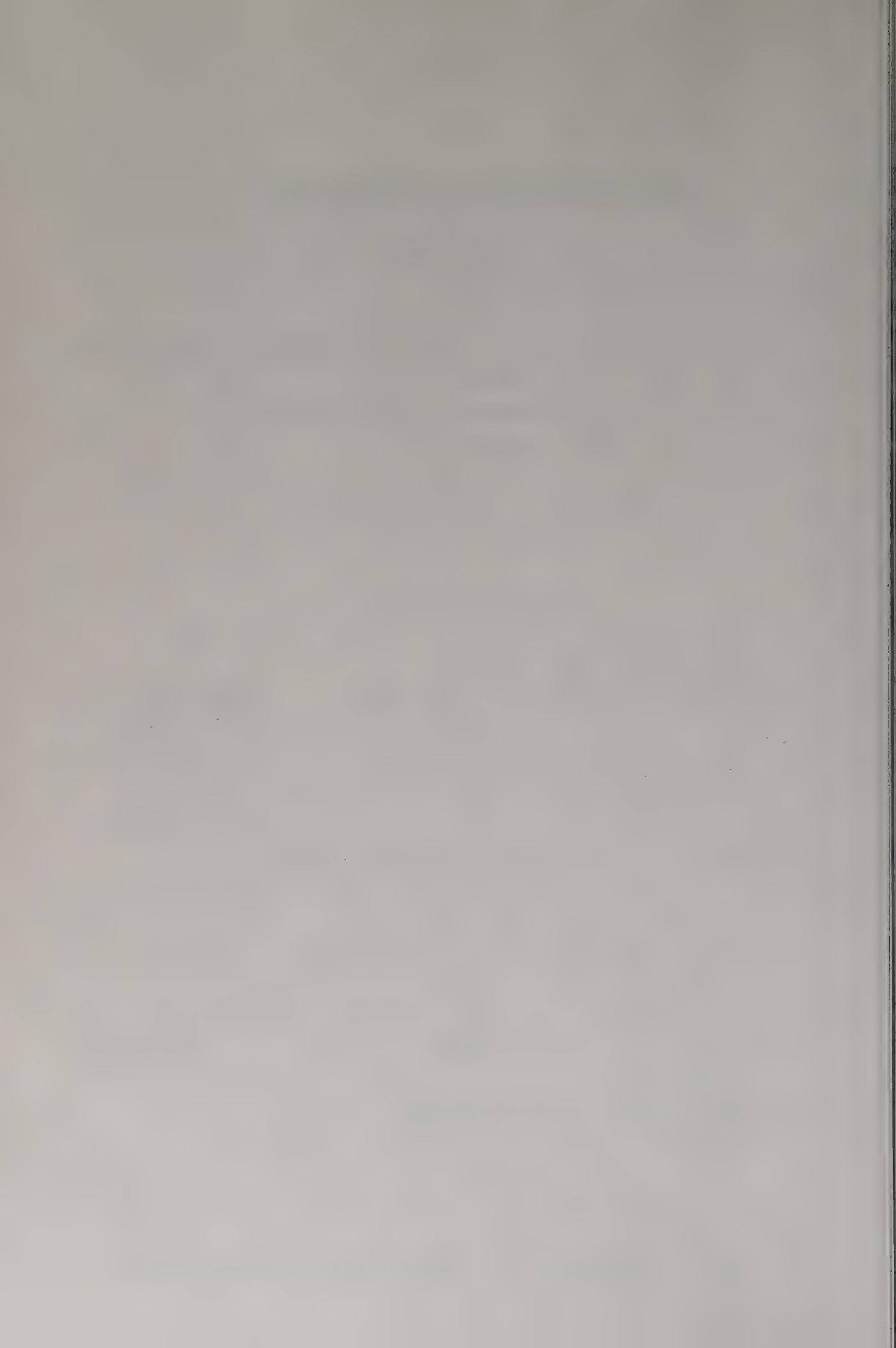


Fig. 2 : Application de la méthode de quadratisation partielle



Précisons qu'au cours de l'ajustement, les inconnues u_i sortent très rarement de leur domaine permis et que le nombre de contraintes à prendre en compte est de 3 au maximum. Parmi celles-ci et sur 200 essais environ, effectués, nous n'avons jamais rencontrés simultanément deux contraintes saturées ou actives. Aussi n'avons nous pas voulu augmenter le temps de calcul de notre programme destiné à une exploitation en routine déjà coûteuse, en utilisant des méthodes très élaborées de problèmes à contraintes.

Cependant, par mesure de sécurité, nous avons voulu introduire l'ensemble des contraintes.

Supposons que nous obtenions au cours d'une itération un vecteur U^* telle que la contrainte k ne soit pas satisfaite :

$$u_k^* < u_{\inf}(k)$$

ou
$$u_k^* > u_{\sup}(k).$$

Nous choisissons alors, le point $[U^*]_1$ de la direction $[U^* - U_i]$, tel que cette contrainte soit saturée :

$$[U^*]_1 = [U_i] + \frac{u_{\sup}(k) - u_i(k)}{u_k^*(k) - u_i(k)} [U^* - U_i]$$

ou
$$[U^*]_1 = [U_i] + \frac{u_{\inf}(k) - u_i(k)}{u_k^*(k) - u_i(k)} [U^* - U_i]$$

Si une seconde contrainte n'est pas satisfaite, le même processus est appliqué mais en partant de $[U^*]_1$ au lieu de $[U^*]$ et en cherchant un nouveau point sur $[U^* - U_1]$, tel que la nouvelle contrainte soit saturée. Et ainsi de suite ...

Cette méthode, en dépit de sa simplicité, s'est montrée très efficace dans ce problème particulier comme le montrent les résultats du chapitre VI.

L'étude des résultats de l'application de la méthode de quadratisation partielle à des cas simulés de notre problème particulier est présentée au chapitre VI, les résultats obtenus avec des données réelles faisant l'objet du chapitre VII.

Quelques détails de programmation sont exposés en Annexe où, nous précisons les valeurs utilisées pour les paramètres introduits au cours des tests (ε_1 , ε_4 , KLM,...) et pour les scalaires h_1 intervenant dans la construction du polynôme d'interpolation.

CHAPITRE III

RESOLUTION DU SYSTEME INTEGRO-DIFFERENTIEL

PRINCIPE DES METHODES UTILISEES



L'identification des paramètres du système intégral-différentiel étudié demande de nombreuses résolutions successives de ce système. Or la résolution est rendue particulièrement délicate par la nature même du problème général posé.

Nous avons retenu une méthode à pas liés, implicite, dont nous exposons le principe dans ce chapitre. Nous rappelons également celui d'une méthode de type Kutta-Runge que nous avons utilisée au cours de nos précédents travaux (Réf. 11, 12, 13, 15).

La comparaison des résultats est présentée au chapitre V où nous étudions également l'influence des divers paramètres introduits sur la précision des résultats et la durée des calculs.

I - LE SYSTEME INTEGRO-DIFFERENTIEL - DIFFICULTES ET CONTRAINTES

A : Rappel du système étudié

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = [B(U)] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_3(t, U) \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_6(t, U) \end{bmatrix} \quad (1)$$

où :

$$\begin{aligned} \varphi_3(t, U) = & u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t - \tau_A + \tau) d\tau + \frac{u_3}{1 - u_3} \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t - \theta + \tau) d\tau \\ & + u_4 \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t - \theta - u_5 + \tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\varphi_6(t, U) = \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t - \theta + \tau) d\tau - u_4 \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t - \theta - u_5 + \tau) d\tau$$

avec : la contrainte

$$\begin{cases} x_2(w) = 0 \\ \text{si } w \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(w) = X_2(w) \\ \text{si } w > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (= \text{second élément de la solution} \\ \text{du système}) \end{matrix} \quad (2)$$

. $f(\tau)$: étant une fonction constante "par morceaux" (fonction "escalier")

. U : étant un vecteur constant pendant chaque résolution (tableau de paramètres identifiés).

. $[B(U)]$: étant une matrice carrée à éléments constants.

Nous connaissons les valeurs initiales :

$$X_1(0) = 1$$

$$X_i(0) = 0 \quad (i = 2, 3, 4, 5 \text{ et } 6).$$

B : Difficultés et contraintes imposées par le problème

Les difficultés essentielles rencontrées concernent le temps de calcul, la précision des résultats et la complexité de l'analyse et de la programmation.

B - 1. Les temps de calcul :

Au cours de chaque itération de l'ajustement, nous avons vu au chapitre précédent que le système intégral-différentiel devait être résolu, un nombre N de fois croissant très vite avec le nombre n de paramètres à ajuster, soit :

$$N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

La minimisation du temps de calcul devient donc un impératif essentiel. L'analyse doit être faite de façon à pouvoir réutiliser le maximum de résultats intermédiaires d'une itération à une autre :

exemple : résultats intermédiaires partiels du calcul des intégrales
de type :

$$\int_0^c f(\tau) x_2(t_i - v + \tau) d\tau$$

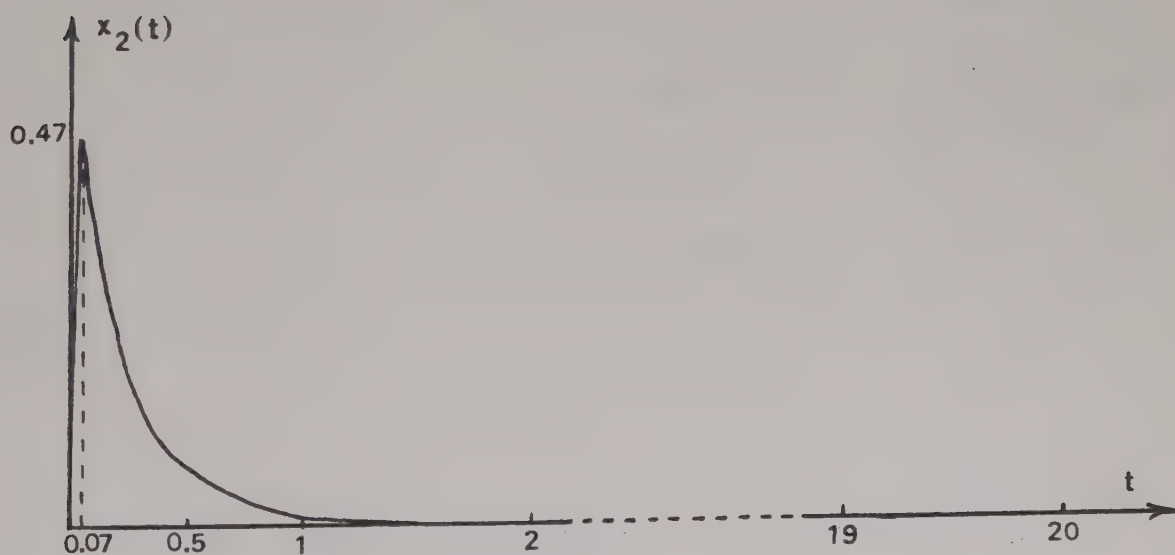
La nature de la fonction escalier $f(\tau)$ permet en effet de profiter de résultats partiels des itérations précédentes $t_{i-1}, t_{i-2}, \dots$. Si l'analyse devient alors presque fastidieuse, le gain en temps machine est considérable.

B - 2. La précision des résultats

Le calcul des intégrales du second membre :

$$\int_0^c f(\tau) x_2(t - v + \tau) d\tau$$

est rendu délicat par l'allure même de la fonction $x_2(t)$ qui possède un maximum très aigu au voisinage de l'origine ($t \neq 0.07$ j.) alors que l'intervalle d'étude est $[0 ; 20 \text{ j.}]$.





Or une bonne précision du calcul de ces intégrales est indispensable puisque la fonction $X_6(t)$ associée à la fonction expérimentale, base de l'identification, dépend essentiellement de leur valeur :

$$\frac{dX_6}{dt} + u_2 X_6 = \int_0^\theta f(\tau) x_2(t - \theta + \tau) d\tau - u_4 \int_0^\theta f(\tau) x_2(t - \theta - u_5 + \tau) d\tau$$

Et bien que nous ne possédions pas de points expérimentaux significatifs sur l'intervalle des temps faibles ($t < 1$ jour), un grand effort doit y être fait pour obtenir des résultats très précis. En effet, la borne supérieure, θ , des intégrales étant de l'ordre de 5 jours, toute la courbe $X_6(t)$ s'en trouve influencée, et nous avons montré qu'une détermination de qualité moyenne de $X_2(t)$, donc de $x_2(t)$, pouvait conduire à des valeurs aberrantes de $X_6(t)$.

B - 3. La complexité de l'analyse et de la programmation

Cette complexité qui peut étonner à priori, est due à deux causes essentielles :

1° - la contrainte (2) intervenant dans le calcul des intégrales :

$$\begin{cases} x_2(w) = 0 \\ \text{si } w \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2(w) = X_2(w) \\ \text{si } w > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(second élément de} \\ \text{la solution)} \end{matrix}$$

Rappelons que, lors du calcul des intégrales, w prend respectivement les trois valeurs :

$$t - \tau_A + \tau$$

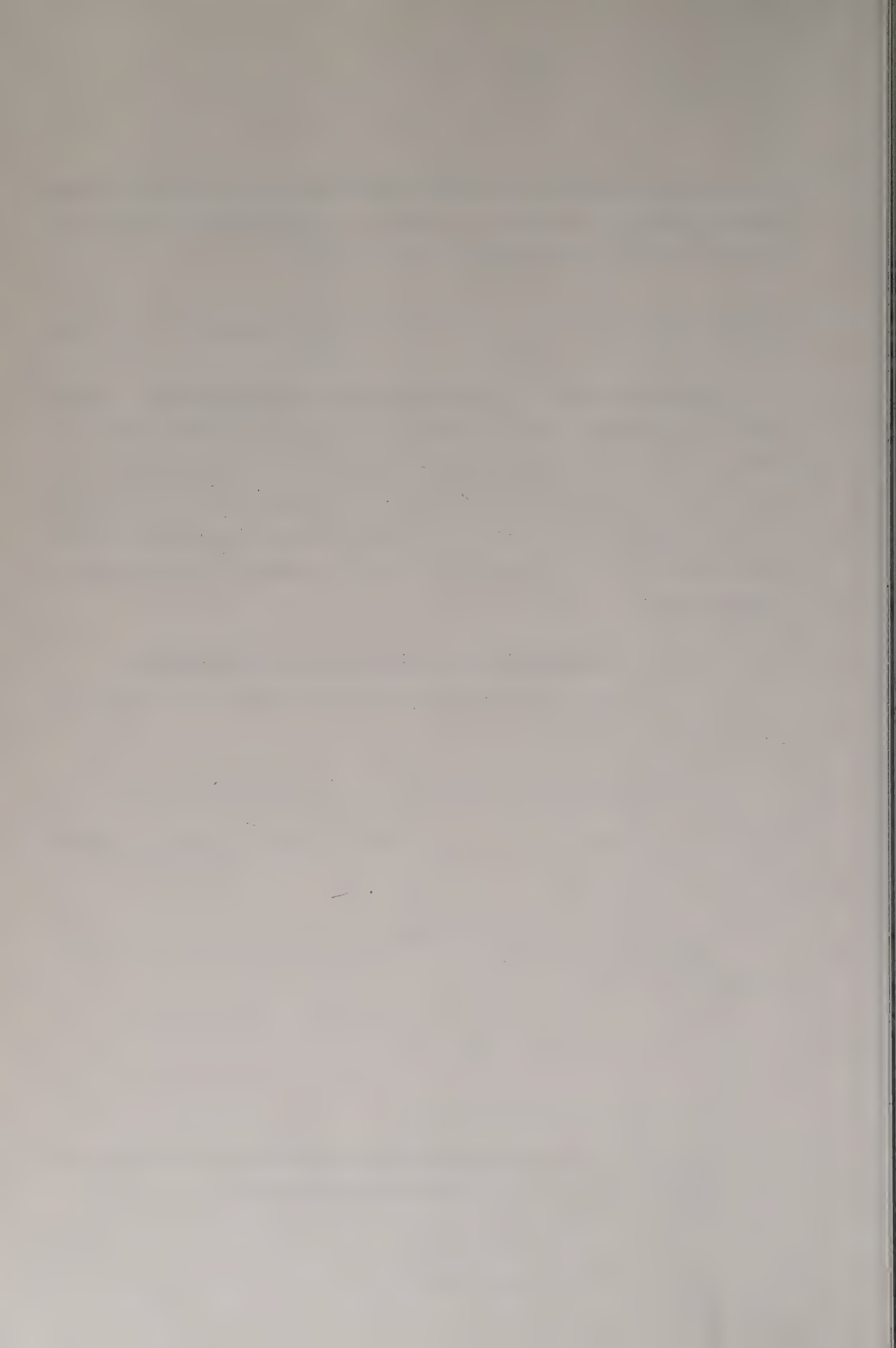
$$t - \theta + \tau$$

$$t - \theta - u_5 + \tau$$

Le signe de chacune de ces expressions doit donc être testé, pour toute valeur de t , sur les deux intervalles d'intégration :

$$0 \leq \tau \leq \tau_A$$

$$0 \leq \tau \leq \theta$$



Ce signe se trouve modifié sur ces intervalles eux-mêmes, lorsque :

$$t < \tau_A$$

$$t < \theta$$

$$t < \theta + u_5$$

Si l'introduction de cette contrainte n'apporte pas de difficultés mathématiques notoires, elle alourdit cependant les calculs et la programmation.

Les détails du calcul de ces intégrales sont exposés au chapitre IV.

2° - La minimisation du temps de calcul de la résolution du système, qui est notre objectif principal :

- nous sommes contraints comme nous venons de le dire en B - 1., à organiser les calculs afin de profiter au maximum de résultats intermédiaires non seulement au cours d'une seule résolution du système mais encore pendant plusieurs résolutions successives nécessitées par l'identification.
- D'autre part, l'existence du maximum très aigu de $x_2(t)$ dont nous venons de parler (B - 2.) demande une extrême précision au cours de la première partie de la résolution (temps faibles). Une telle précision devient superflue en seconde partie et augmenterait inutilement le temps des calculs. Le changement du pas d'intégration du système s'impose donc au cours de la résolution. En général, un tel changement entraîne une modification légère des programmes. Il n'en est pas de même dans notre application particulière où nous sommes en présence d'un système à mémoire de formulation déjà complexe. Le changement de la valeur du pas d'intégration entraîne en effet une modification de la plupart des grandeurs et résultats intermédiaires sauvegardés en mémoire, et la nécessité de conserver des résultats intermédiaires supplémentaires.

B - 4. La vérification des résultats

La complexité de l'analyse et de la programmation peut entraîner un risque d'erreur non négligeable. Or le système intégral-différentiel étudié ne possède pas de solution stricte explicite dans le cas général : nous ne pouvons donc pas vérifier l'exactitude et la précision des résultats des méthodes numériques en comparant ces derniers aux valeurs correspondantes de la solution stricte.

Cependant, nous avons pu obtenir plusieurs cas particuliers où nous pouvions expliciter la solution du système. Ces cas particuliers regroupant les principales difficultés rencontrées dans le cas général, la concordance entre l'ensemble des résultats obtenus par méthode numérique et les valeurs correspondantes des solutions strictes semble un bon gage de sécurité.

Nous pouvons ainsi vérifier les étapes intermédiaires et comparer la précision des résultats des diverses méthodes numériques utilisées.

II - LA METHODE A PAS LIES, IMPLICITE - APPLICATION A NOTRE PROBLEME

Ecrivons le système (1) sous la forme :

$$\frac{d}{dt} [X] = [B] [X] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta Q_c(t) + \frac{u_3}{1-u_3} \Delta Q_{gv}(t) + u_4 \Delta Q_{gv}(t - u_5) \\ 0 \\ 0 \\ \Delta Q_{gv}(t) - u_4 \Delta Q_{gv}(t - u_5) \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt} [X] = [B] [X] + [\varphi] \quad (3)$$

où :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_5 = 0$$

$$\varphi_3 = \Delta Q_c(t) + \frac{u_3}{1-u_3} \Delta Q_{gv}(t) + u_4 \Delta Q_{gv}(t - u_5) \quad (4)$$

$$\varphi_6 = \Delta Q_{gv}(t) - u_4 \Delta Q_{gv}(t - u_5)$$

avec :

$$\Delta Q_c(t) = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t - \tau_A + \tau) d\tau \quad (5)$$

$$\Delta Q_{gv}(t) = \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t - \theta + \tau) d\tau \quad (6)$$

et :

$$x_2(w) = 0 \quad \text{si} \quad w \leq 0$$

$$x_2(w) = X_2(w) \quad \text{si} \quad w > 0$$

Le système est résolu par une méthode de pas à pas qui comporte deux phases :

1° - une phase d'"Amorçage" :

c'est-à-dire la construction de la solution $X(t)$ aux premiers points considérés de notre intervalle d'étude :

$$X(t_1), X(t_2) \text{ et } X(t_3)$$

2° - la phase itérative

- connaissant la solution X en $t_0, t_1, t_2, \dots, t_i$ nous recherchons $X(t_{i+1})$.

Supposons l'intervalle des temps divisé par un partage équidistant:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = h, \quad \dots \quad t_i = ih$$

Nous commençons à présenter la phase itérative pour montrer quelles sont les initialisations nécessaires à effectuer pendant la phase d'"amorçage".

A - La phase itérative :

Connaissant $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_i)$, calculons $X(t_{i+1})$:

Après l'intégration des deux membres entre t_i et t_{i+1} , le système (3) s'écrit :

$$X(t_{i+1}) - X(t_i) = [B] \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} X dt \right] + \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi dt \right] \quad (7)$$

où :

$\int_{t_i}^{t_{i+1}} X dt$ dépend de $X(t)$ inconnu sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$

$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi dt$ dépend également de $X(t)$, par l'intermédiaire de $x_2(t)$, sur cet intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ mais aussi de sa valeur sur les intervalles $[t_i - \theta; t_i]$ et $[t_i - \tau_A; t_i]$ où $X(t)$ est supposé connu par points $(t_i - h, t_i - 2h, \dots)$.

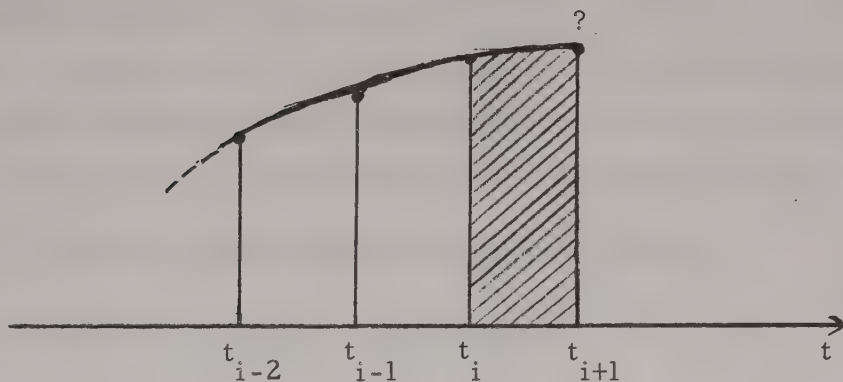
Calculons tous les éléments de ce système (7) en fonction de $X(t_{i+1})$, vecteur inconnu. La résolution du système ainsi obtenu fournira le tableau $X(t_{i+1})$.

En réalité il ne peut s'agir de calculs stricts, mais d'approximations de la valeur des diverses intégrales. Nous aurons recours à une interpolation de $X(t)$ et de $\varphi(t)$ sur un support comprenant le point t_{i+1} lui même : $(t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1})$.

A - 1. Calcul de $\int_{t_i}^{t_{i+1}} X dt$ en fonction de $X(t_{i+1})$:

Interpolons chaque élément de $X(t)$ par un polynôme du 3ème degré en choisissant comme support les 4 points :

$$t_{i-2} = t_i - 2h ; \quad t_{i-1} = t_i - h ; \quad t_i ; \quad t_{i+1} = t_i + h$$



$$x_k = \left[1 \quad \frac{t - t_{i-2}}{h} \quad \frac{(t - t_{i-2})^2}{h^2} \quad \frac{(t - t_{i-2})^3}{h^3} \right] [L_3] \begin{bmatrix} x_k(t_{i-2}) \\ x_k(t_{i-1}) \\ x_k(t_i) \\ x_k(t_{i+1}) \end{bmatrix}$$

$[L_3]$ étant la matrice de Lagrange d'ordre 3 pour un partage régulier (Réf. 7).

Le calcul classique, après intégration entre t_i et t_{i+1} conduit à la forme :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{x}_k dt = [\beta_1'' \quad \beta_2'' \quad \beta_3'' \quad \beta_4''] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k(t_{i-2}) \\ \mathbf{x}_k(t_{i-1}) \\ \mathbf{x}_k(t_i) \\ \mathbf{x}_k(t_{i+1}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\text{où : } \beta_1'' = \frac{h}{24} \quad \beta_2'' = -\frac{5h}{24} \quad \beta_3'' = \frac{19h}{24} \quad \beta_4'' = \frac{3h}{8}$$

En appliquant cette formule à tous les éléments de $\mathbf{X}(t)$ nous obtenons :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{X}(t) dt = \beta_1'' \mathbf{X}(t_{i-2}) + \beta_2'' \mathbf{X}(t_{i-1}) + \beta_3'' \mathbf{X}(t_i) + \beta_4'' \mathbf{X}(t_{i+1}) \quad (9)$$

$$A - 2. \quad \text{Calcul de } \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi dt \text{ en fonction de } \mathbf{X}(t_{i+1})$$

Le processus reste identique, mais φ étant déjà un tableau d'intégrales le problème est plus compliqué :

- quatre des éléments de φ sont nuls donc :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_k dt = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, 4 \text{ et } 5$$

- les deux autres éléments peuvent se décomposer et conduisent à

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_3 dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_c(t) dt + \frac{u_3}{1-u_3} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t) dt + u_4 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t) dt \quad (10)$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_6 dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t) dt - u_4 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t - u_5) dt \quad (11)$$

Nous devons donc calculer les trois intégrales :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_c(t) dt \quad \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t) dt \quad \text{et} \quad \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t - u_5) dt$$

Remarque : Calcul de $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t - u_5) dt$:

Il peut se déduire des résultats des itérations précédentes. En effet :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t - u_5) dt = \int_{t_i - u_5}^{t_{i+1} - u_5} \Delta Q_{gv}(t) dt$$

Hypothèse :

Nous supposons que u_5 est égal à un multiple de la valeur h du pas d'intégration et qu'il peut être éventuellement nul.

Cette hypothèse se justifie car nous avons vérifié qu'une variation de u_5 égale au pas h provoquait une modification relative de l'ordre de 10^{-6} de $x_6(t)$ qui est le seul élément de $X(t)$ qui intervienne dans l'identification.

Les calculs se simplifient puisque, dans ce cas :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t - u_5) dt = \int_{t_i - kh}^{t_{i+1} - kh} \Delta Q_{gv}(t) dt \quad (12)$$

quantité calculée à l'itération $(i-k)$ et que nous appellerons $SQGV(t_{i-k})$.

Nous garderons donc en mémoire $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t) dt$ pendant un nombre d'itérations égal à $\frac{u_5}{h}$.

a) Calcul de $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_c(t) dt$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_c(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t - \tau_A + \tau) d\tau dt \quad (13)$$

$$\text{où : } \begin{cases} x_2(w) = 0 & \text{si } w \leq 0 \\ x_2(w) = X_2(w) & \text{si } w > 0 \end{cases} \quad (14)$$

Après interpolation de $\Delta Q_c(t)$ sur le même support que précédemment nous obtenons une relation de même forme :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_c(t) dt = [\beta_1'' \quad \beta_2'' \quad \beta_3'' \quad \beta_4''] \begin{bmatrix} \Delta Q_c(t_{i-2}) \\ \Delta Q_c(t_{i-1}) \\ \Delta Q_c(t_i) \\ \Delta Q_c(t_{i+1}) \end{bmatrix} \quad (15)$$

où les coefficients β'' sont inchangés par rapport aux précédents (8).

. Les 3 premiers éléments ΔQ_c sont indépendants de $X(t)$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, donc de $X(t_{i+1})$:

$$Y_1 = \Delta Q_c(t_{i-2}) = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t_{i-2} - \tau_A + \tau) d\tau$$

$$Y_2 = \Delta Q_c(t_{i-1}) = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t_{i-1} - \tau_A + \tau) d\tau$$

$$Y_3 = \Delta Q_c(t_i) = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t_i - \tau_A + \tau) d\tau$$

en effet :

$$(t_j - \tau_A + \tau) \leq t_i \quad \text{si} \quad \begin{cases} 0 \leq \tau \leq \tau_A \\ j \leq i \end{cases}$$

Ils ont été calculés aux itérations précédentes puisqu'il y a décalage d'une itération à l'autre :

$$\begin{aligned} Y_2 \text{ (itération } i) &\longrightarrow Y_1 \text{ (itération } i+1) \\ Y_3 \text{ (itération } i) &\longrightarrow Y_2 \text{ (itération } i+1) \\ Y_4 \text{ (itération } i) &\longrightarrow Y_3 \text{ (itération } i+1) \end{aligned}$$

. Le 4ème élément dépend, lui, de la valeur prise par $x_2(t)$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$:

$$Y_4 = \Delta Q_c(t_{i+1}) = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t_{i+1} - \tau_A + \tau) d\tau$$

Décomposons Y_4 en deux intégrales :

$$Y_4 = u_1 \int_0^{\tau_A - h} f(\tau) x_2(t_{i+1} - \tau_A + \tau) d\tau + u_1 \int_{\tau_A - h}^{\tau_A} f(\tau) x_2(t_{i+1} - \tau_A + \tau) d\tau \quad (16)$$

soit $Y_4 = S_1 + S_2$.

- La première intégrale est indépendante de $x_2(t)$ sur $[t_i, t_{i+1}]$:

$$S_1 = u_1 \int_0^{\tau_A - h} f(\tau) x_2(t_{i+1} - \tau_A + \tau) d\tau$$

puisque :

$$t_{i+1} - \tau_A \leq t_{i+1} - \tau_A + \tau \leq t_i \quad \text{si : } 0 \leq \tau \leq \tau_A - h$$

S_1 est calculé compte-tenu de la contrainte (14), à chaque itération, par une méthode qui est décrite au chapitre IV.

- Calcul de la seconde intégrale :

$$S_2 = u_1 \int_{\tau_A - h}^{\tau_A} f(\tau) x_2(t_{i+1} - \tau_A + \tau) d\tau$$

$f(\tau)$ est une fonction "escalier" (constante "par morceaux"). Or l'intervalle $\Delta \tau$ séparant deux discontinuités c'est-à-dire deux divisions cellulaires, est bien supérieur à la valeur du pas d'intégration h . Or τ_A correspond à une division cellulaire : $f(\tau)$ reste donc constante sur l'intervalle d'intégration :

$$f(\tau) = f_a \quad \text{si} \quad \tau_A - h \leq \tau \leq \tau_A$$

$$S_2 = u_1 f_a \int_{\tau_A - h}^{\tau_A} x_2 (t_{i+1} - \tau_A + \tau) d\tau$$

soit, après changement de variable :

$$t' = t_{i+1} - \tau_A + \tau$$

$$S_2 = u_1 f_a \int_{t_{i+1} - h}^{t_{i+1}} x_2 (t') dt'$$

Le calcul par interpolation, de type précédent, conduit à :

$$S_2 = u_1 \cdot f_a \begin{bmatrix} \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' & \beta_4'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t_{i-2}) \\ x_2(t_{i-1}) \\ x_2(t_i) \\ x_2(t_{i+1}) \end{bmatrix}$$

soit, en isolant les termes indépendants de $x_2(t_{i+1})$

$$S_2 = u_1 f_a \begin{bmatrix} \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t_{i-2}) \\ x_2(t_{i-1}) \\ x_2(t_i) \end{bmatrix} + u_1 f_a \beta_4'' x_2(t_{i+1})$$

La relation (15) s'écrit donc :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_c(t) dt = \begin{bmatrix} \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' & \beta_4'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_{14} + Y_{24} \end{bmatrix} + \beta_4''^2 u_1 f_a x_2(t_{i+1}) \quad (17)$$

où :

$$Y_{14} = S_1 = u_1 \int_0^{\tau_A - h} f(\tau) x_2(t_{i+1} - \tau_A + \tau) d\tau \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_2(w) = 0 \\ \text{si } w \leq 0 \end{cases}$$

$$Y_{24} = u_1 f_a \begin{bmatrix} \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t_{i-2}) \\ x_2(t_{i-1}) \\ x_2(t_i) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Y_{14} et Y_{24} sont indépendants de $X(t_{i+1})$

Y_{14} est calculé par sous-programme (voir chapitre IV).

Précisons également Y_4 qui deviendra par décalage au cours des 3 itérations suivantes Y_3 , Y_2 enfin Y_1 :

$$Y_4 = Y_{14} + Y_{24} + \beta_4'' u_1 f_a x_2(t_{i+1})$$

b) Calcul de $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t) dt$:

Il s'effectue de la même manière que le calcul de $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_c(t) dt$ et conduit à la relation :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t) dt = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_{14} + Z_{24} \end{bmatrix} + \beta_4''^2 f_t x_2(t_{i+1}) \quad (20)$$

où :

$$Z_1 = \Delta Q_{gv}(t_{i-2}) = \int_0^\theta f(\tau) x_2(t_{i-2} - \theta + \tau) d\tau \quad \text{avec} \begin{cases} x_2(w) = 0 \\ \text{si } w \leq 0 \end{cases}$$

$$Z_2 = \Delta Q_{gv}(t_{i-1}) = \int_0^\theta f(\tau) x_2(t_{i-1} - \theta + \tau) d\tau \quad "$$

$$Z_3 = \Delta Q_{gv}(t_i) = \int_0^\theta f(\tau) x_2(t_i - \theta + \tau) d\tau$$

$$Z_{14} = \int_0^{\theta-h} f(\tau) x_2(t_{i+1} - \theta + \tau) d\tau \quad \text{avec} \begin{cases} x_2(w) = 0 \\ \text{si } w \leq 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$Z_{24} = f_t \begin{bmatrix} \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t_{i-2}) \\ x_2(t_{i-1}) \\ x_2(t_i) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Z_1 , Z_2 et Z_3 se déduisent des itérations précédentes par décalage, comme

$$Y_1, Y_2 \text{ et } Y_3.$$

Z_{14} est calculé par sous-programme (chapitre IV).

Et comme pour Y_{24} , $f(\tau)$ reste constant sur l'intervalle d'intégration de Z_{24} :

$$f(\tau) = f_t \quad \text{pour} \quad \theta - h \leq \tau \leq \theta$$

Quant à Z_4 qui sera mis en mémoire pour devenir Z_3 , Z_2 puis Z_1 au cours des itérations suivantes, il est donné par :

$$Z_4 = Z_{14} + Z_{24} + \beta_4'' f_t x_2(t_{i+1}) \quad (23)$$

et ne peut être calculé qu'en fin d'itération après détermination de $X(t_{i+1})$.

c) Calcul de $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_k dt$ en fonction des résultats précédents :

Nous avons vu que :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_k dt = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, 4 \text{ et } 5 \quad (24)$$

D'autre part rappelons les relations (10) et (11).

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_3 dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_c(t) dt + \frac{u_3}{1-u_3} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t) dt + u_4 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t-u_5) dt$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_6 dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t) dt - u_4 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t-u_5) dt,$$

et remplaçons les différentes intégrales par leurs valeurs établies ci-dessus, nous obtenons deux relations de la forme :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_3 dt = \beta_4''^2 \left(u_1 f_a + \frac{u_3}{1-u_3} f_t \right) x_2(t_{i+1}) + s_3 \quad (25)$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_6 dt = \beta_4''^2 f_t x_2(t_{i+1}) + s_6 \quad (26)$$

où :

$$s_3 = \begin{bmatrix} \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' & \beta_4'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_{14} + Y_{24} \end{bmatrix} + \frac{u_3}{1-u_3} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_{14} + Z_{24} \end{bmatrix} + u_4 \int_{t_i - u_5}^{t_{i+1} - u_5} \Delta Q_{gv}(t) dt \quad (27)$$

$$s_6 = \begin{bmatrix} \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' & \beta_4'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_{14} + Z_{24} \end{bmatrix} - u_4 \int_{t_i - u_5}^{t_{i+1} - u_5} \Delta Q_{gv}(t) dt \quad (28)$$

Y_1, Y_2, Y_3 et Y_4 d'une part, Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 d'autre part sont égaux aux valeurs prises aux 3 itérations précédentes par Y_4 et Z_4 , eux-mêmes étant donnés par (19) et (23).

Y_{24} et Z_{24} sont déduits de (19) et (22)

Y_{14} et Z_{14} sont les valeurs des deux intégrales (18) et (21) calculées par sous-programmes (chapitre IV).

Enfin pour le calcul de $\int_{t_i - u_5}^{t_{i+1} - u_5} \Delta Q_{gv}(t) dt$, nous gardons systématiquement en mémoire, pendant $\left(\frac{u_5}{h} + 1\right)$ itérations, la quantité :

$$SQGV = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t_{i+1}) dt = \begin{bmatrix} \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' & \beta_4'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Z_4 étant donné par la relation (23).

A.3 Formation du système global de la phase itérative

Le système initial (7) s'écrivait

$$X(t_{i+1}) - X(t_i) = [B] \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} X dt \right] + \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi dt \right]$$

En appliquant les résultats précédents, nous pouvons l'écrire sous une forme approchée :

$$X_{i+1} - X_i = [B] \begin{bmatrix} \beta_1'' X_{i-2} + \beta_2'' X_{i-1} + \beta_3'' X_i + \beta_4'' X_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_3 x_2(t_{i-1}) + \\ 0 \\ 0 \\ r_6 x_2(t_{i+1}) + s \end{bmatrix}$$

où :

$$r_3 = \beta_4''^2 \left(u_1 f_a + \frac{u_3}{1-u_3} f_t \right)$$

$$r_6 = \beta_4''^2 f_t$$

En isolant les termes inconnus (X_{i+1} et $x_2(t_{i+1})$), nous obtenons :

$$[I - \beta_4'' [B]] X_{i+1} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_3 x_2(t_{i+1}) \\ 0 \\ 0 \\ r_6 x_2(t_{i+1}) \end{bmatrix} = X_i + [B] \begin{bmatrix} \beta_1'' X_{i-2} + \beta_2'' X_{i-1} + \beta_3'' X_i \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_3 \\ 0 \\ 0 \\ s_6 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons donc un système linéaire de la forme :

$$[C_1] X_{i+1} = E_1 \quad (31)$$

où :

$[C_1]$: est une matrice de dimensions (6×6) dont les éléments s'écrivent :

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= -\beta_4'' B_{i,j} \quad \text{sauf pour } \begin{cases} i=j \\ i,j=3,2 \\ i,j=6,2 \end{cases} \\ c_{i,i} &= 1 - \beta_4'' B_{i,i} \\ c_{3,2} &= -\beta_4'' B_{3,2} - \beta_4''^2 (u_1 f_a + \frac{u_3}{1-u_3} f_t) \\ c_{6,2} &= -\beta_4'' B_{6,2} - \beta_4''^2 f_t \end{aligned} \quad (32)$$

E_1 : est une matrice colonne telle que :

$$E_1 = X_i + [B] \begin{bmatrix} \beta_1'' X_{i-2} + \beta_2'' X_{i-1} + \beta_3'' X_i \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_3 \\ 0 \\ 0 \\ s_6 \end{bmatrix} \quad (33)$$

X_{i+1} : solution du système intégral-différentiel au point t_{i+1}

est obtenu par résolution de ce système linéaire. Cette dernière est effectuée par triangularisation par la méthode de Golub (Réf. 7 p. 127).

Remarque : Rappel des grandeurs nécessaires initialisées ou gardées en mémoire pour commencer la $i^{\text{ème}}$ itération :

. Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2 et Z_3 conservées en mémoire et déduites de

Y_4 et Z_4 des 3 itérations précédentes :

$Y_4(i-3), Y_4(i-2), Y_4(i-1), Z_4(i-3), Z_4(i-2)$ et $Z_4(i-1)$.

(relations 16 et 23).

. valeur prise par SQGV pendant l'itération $(i - \frac{u_5}{h} - 1)$: relation 29.

. grandeurs nécessitées par le calcul des intégrales Y_{14} et Z_{14} (voir chapitre IV) :

$$x_2(t_j) \text{ et } \int_{t_j}^{t_{j+1}} x_2(t) dt$$

pour $j = i-1, i-2, \dots, i - (\frac{\theta}{h} + 1)$.

Cette phase itérative débute à $t = 4h$ (soit $i = 3$ dans nos formules)

La phase d'amorçage doit donc fournir :

$$\begin{cases} Y_1 = Y_4(t = h) = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(h - \tau_A + \tau) d\tau \\ Y_2 = Y_4(t = 2h) = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(2h - \tau_A + \tau) d\tau \\ Y_3 = Y_4(t = 3h) = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(3h - \tau_A + \tau) d\tau \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} Z_1 = Z_4(t = h) = \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(h - \theta + \tau) d\tau \\ Z_2 = Z_4(t = 2h) = \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(2h - \theta + \tau) d\tau \\ Z_3 = Z_4(t = 3h) = \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(3h - \theta + \tau) d\tau \end{cases} \quad (35)$$

où, dans toutes ces relations :

$$x_2(w) = 0 \quad \text{si} \quad w \leq 0$$

$$x_2(w) = X_2(w) \quad \text{si} \quad w > 0.$$

Influence de cette contrainte sur l'ensemble des initialisations de l'itération (i).

. La contrainte ($x_2(w) = 0$ si $w \leq 0$) entraîne :

$$SQGV(t) = 0 \quad \text{pour } t \leq 0 \quad (\text{rel. 20 et 29})$$

et pendant les $\left(\frac{\theta}{h}\right)$ premières itérations, la valeur qui doit être

utilisée pour l'intégrale $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Q_{gv}(t - u_5) dt$ est nulle.

. Le problème est plus complexe pour Y_{14} et Z_{14} où il ne s'agit pas, comme pour SQGV d'un effet de "tout ou rien". La discontinuité portant sur la fonction à intégrer se déplaçant à l'intérieur de l'intervalle d'intégration, le phénomène est progressif et il existe de véritables phases transitoires :

$$0 < t < \tau_A \quad \text{pour } Y_{14}$$

$$0 < t < \theta \quad \text{pour } Z_{14}$$

Ce problème est traité au chapitre IV.

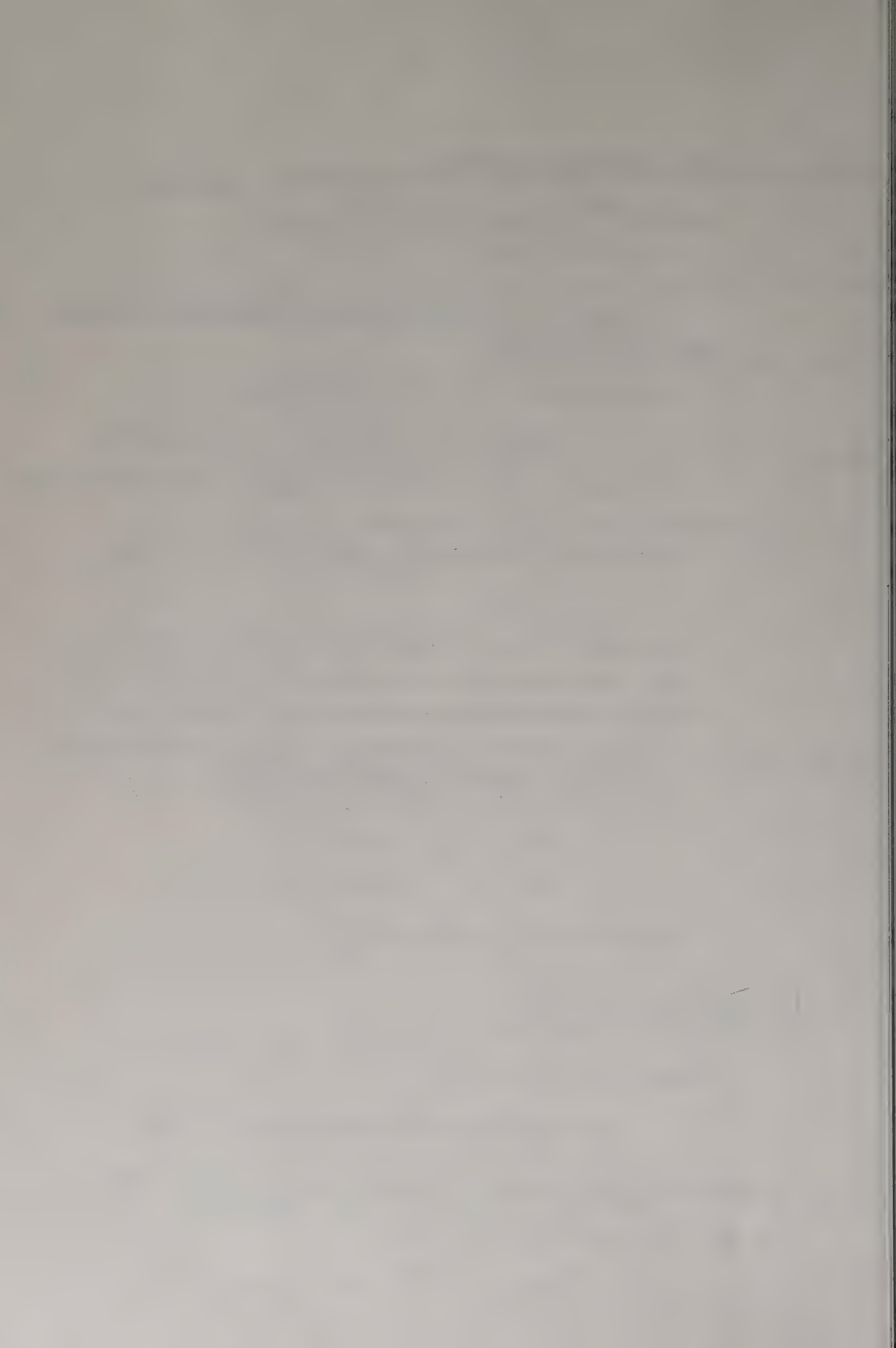
B : La phase d'"amorçage"

Rappelons le système initial :

$$\frac{d}{dt} [X] = [B] [X] + [\varphi] \quad (36)$$

et intégrons les deux membres successivement sur les intervalles

$[0, h]$, $[h, 2h]$ et $[2h, 3h]$:



$$\begin{cases} X_1 - X_0 = [B] \left[\int_0^h X dt \right] + \left[\int_0^h \varphi dt \right] \\ X_2 - X_1 = [B] \left[\int_h^{2h} X dt \right] + \left[\int_h^{2h} \varphi dt \right] \\ X_3 - X_2 = [B] \left[\int_{2h}^{3h} X dt \right] + \left[\int_{2h}^{3h} \varphi dt \right] \end{cases} \quad (37)$$

Ce système global, formé de 3 systèmes partiels non indépendants, est donc constitué de 3 n (= 18) équations. Les inconnues sont les éléments des trois tableaux :

$$X_1 = X(h), X_2 = X(2h) \text{ et } X_3 = X(3h).$$

Nous devons en outre, au cours de cette phase, déterminer les grandeurs qui interviennent pour initialiser la phase itérative : $Y_1, Y_2 \dots$ (voir remarque précédente).

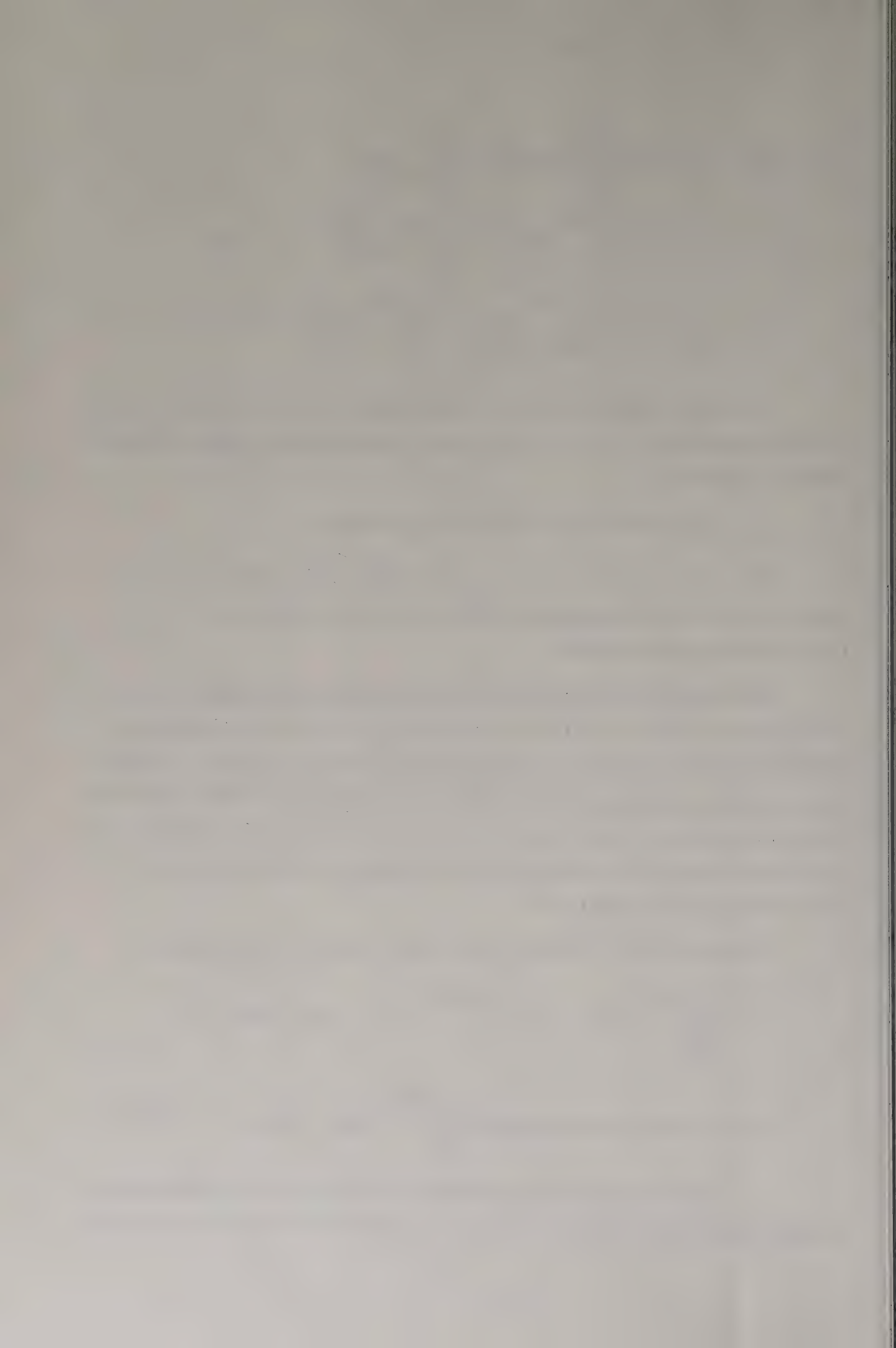
Pour résoudre ce système nous ferons également appel à une interpolation de $X(t)$ et $\varphi(t)$ sur l'intervalle $[0, 3h]$ et sous réserve de validité de cette approximation, nous remplacerons ce système intégral par un système linéaire. Cette validité sera d'ailleurs testée "expérimentalement" sur des cas particuliers dont nous connaissons la solution stricte, ce qui nous permet également de déterminer la valeur optimale à donner au pas h . (voir chapitre V).

Pour former ce système nous devons calculer les 6 intégrales :

$$\int_{jh}^{(j+1)h} X dt \quad \text{et} \quad \int_{jh}^{(j+1)h} \varphi dt \quad \text{où } j = 0, 1 \text{ et } 2$$

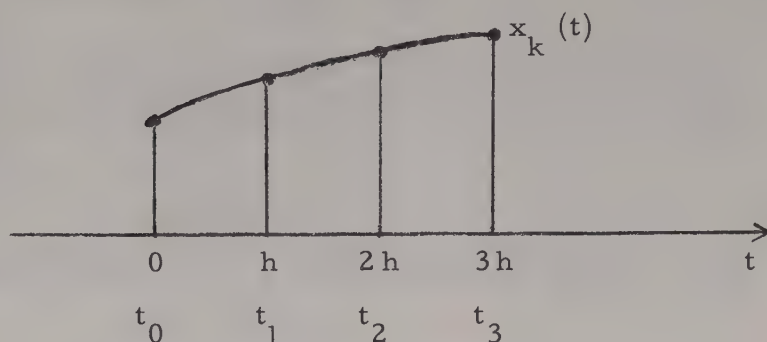
$$\underline{B.1} : \underline{\text{Calcul des intégrales}} \quad \int_{jh}^{(j+1)h} X dt \quad \text{pour } j = 0, 1 \text{ et } 2.$$

Le processus est identique à celui qui a été utilisé pendant la phase itérative mais nous introduisons maintenant trois valeurs de $X(t)$



qui ne sont pas encore déterminées et qui sont les inconnues de notre problème.

Nous appelons X_1 , X_2 et X_3 les valeurs, encore inconnues, prises par $X(t)$ aux trois points t_1 , t_2 et t_3 (soit en h , $2h$ et $3h$) : Approchons $X(t)$ par interpolation polynômiale sur l'intervalle $[0, 3h]$, en prenant pour support les 4 points $t_0 = 0$, t_1 , t_2 et t_3 .



Chaque élément $x_k(t)$ de $X(t)$ peut être approché par le polynôme d'interpolation :

$$x_k(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{h} & \frac{t^2}{h^2} & \frac{t^3}{h^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k(0) \\ x_k(h) \\ x_k(2h) \\ x_k(3h) \end{bmatrix}$$

$[L_3]$: étant la matrice de Lagrange (4 points, partage régulier) (Réf. 7).

Après intégration des polynômes d'interpolation de tous les éléments x_k de X , sur les intervalles $[0, h]$, $[h, 2h]$ et $[2h, 3h]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^h X dt &= \beta_1 X_0 + \beta_2 X_1 + \beta_3 X_2 + \beta_4 X_3 \\ \int_h^{2h} X dt &= \beta'_1 X_0 + \beta'_2 X_1 + \beta'_3 X_2 + \beta'_4 X_3 \\ \int_{2h}^{3h} X dt &= \beta''_1 X_0 + \beta''_2 X_1 + \beta''_3 X_2 + \beta''_4 X_3 \end{aligned} \quad (38)$$

où :

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \frac{3h}{8} & \beta'_1 &= -\frac{h}{24} & \beta''_1 &= \frac{h}{24} \\
 \beta_2 &= \frac{19h}{24} & \beta'_2 &= \frac{13h}{24} & \beta''_2 &= -\frac{5h}{24} \\
 \beta_3 &= -\frac{5h}{24} & \beta'_3 &= \frac{13h}{24} & \beta''_3 &= \frac{19h}{24} \\
 \beta_4 &= \frac{h}{24} & \beta'_4 &= -\frac{h}{24} & \beta''_4 &= \frac{3h}{8}
 \end{aligned} \tag{39}$$

Les coefficients β''_i ont d'ailleurs déjà été utilisés lors de la phase itérative.

B.2 : Calcul des intégrales $\int_{jh}^{(j+1)h} \varphi dt$ où $j = 0, 1$ et 2

Rappelons la forme de φ :

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta Q_c(t) + \frac{u_3}{1-u_3} \Delta Q_{gv}(t) + u_4 \Delta Q_{gv}(t - u_5) \\ 0 \\ 0 \\ \Delta Q_{gv}(t) - u_4 \Delta Q_{gv}(t - u_5) \end{bmatrix} \tag{40}$$

où ΔQ_c et ΔQ_{gv} sont des intégrales :

$$\Delta Q_c = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t - \tau_A + \tau) d\tau$$

$$\Delta Q_{gv} = \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t - \theta + \tau) d\tau$$

$$\text{où } \begin{cases} x_2(w) = 0 \\ \text{si } w \leq 0 \end{cases} \tag{41}$$

La recherche de $\int_{jh}^{(j+1)h} \varphi dt$ entraîne donc le calcul pour $j = 0, 1$ et 2 , de :

$$\int_{jh}^{(j+1)h} \Delta Q_c(t) dt \quad \int_{jh}^{(j+1)h} \Delta Q_{gv}(t) dt \quad \int_{jh}^{(j+1)h} \Delta Q_{gv}(t-u_5) dt$$

Hypothèse Nous supposons que $u_5 \geq 3h$

Cette hypothèse se justifie :

- par la faible influence d'une modification Δu_5 de l'ordre de grandeur de h , sur la fonction $X_6(t)$, élément de X qui est la base de l'ajustement (voir hypothèse p. 55) ;

- par la possibilité de considérer le phénomène correspondant à $u_5 = 0$ par l'intermédiaire d'un paramètre particulier : u_3 (voir chapitre I : "mort à la sortie de la moelle").

Cette hypothèse entraîne pendant la phase d'"amorçage" :

$$\dot{x}_2(t - u_5) = 0$$

$$\text{d'où} \quad \Delta Q_{gv}(t - u_5) = 0$$

$$\text{et} \quad \int_{jh}^{(j+1)h} \underline{\underline{\Delta Q_{gv}(t - u_5) dt}} = 0 \quad (j = 0, 1 \text{ et } 2) \quad (42)$$

$$\text{a) } \underline{\underline{\text{Calcul de } \int_{jh}^{(j+1)h} \Delta Q_c(t) dt}} \quad \text{pour } j = 0, 1 \text{ et } 2$$

Le principe reste identique à celui de la phase itérative mais, le but recherché est d'exprimer les valeurs de ces intégrales en fonction des inconnues X_1 , X_2 et X_3 c'est-à-dire $X(h)$, $X(2h)$ et $X(3h)$.

L'intégration après interpolation polynomiale de $\Delta Q_c(t)$ sur le support précédent $(0, h, 2h \text{ et } 3h)$ conduit aux équations :

$$\begin{aligned}
 \int_0^h \Delta Q_c(t) dt &= [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4] \begin{bmatrix} \Delta Q_c(0) \\ \Delta Q_c(h) \\ \Delta Q_c(2h) \\ \Delta Q_c(3h) \end{bmatrix} \\
 \int_h^{2h} \Delta Q_c(t) dt &= [\beta'_1 \quad \beta'_2 \quad \beta'_3 \quad \beta'_4] \begin{bmatrix} \Delta Q_c(0) \\ \Delta Q_c(h) \\ \Delta Q_c(2h) \\ \Delta Q_c(3h) \end{bmatrix} \\
 \int_{2h}^{3h} \Delta Q_c(t) dt &= [\beta''_1 \quad \beta''_2 \quad \beta''_3 \quad \beta''_4] \begin{bmatrix} \Delta Q_c(0) \\ \Delta Q_c(h) \\ \Delta Q_c(2h) \\ \Delta Q_c(3h) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{43}$$

Les coefficients β_i , β'_i et β''_i liés au support et à l'intervalle d'intégration sont ceux qui intervenaient dans le calcul de $\int_{jh}^{(j+1)h} X dt$ (relations 39).

Il nous faut donc calculer $\Delta Q_c(jh)$ en fonction des inconnues X_1 , X_2 et X_3 pour $j = 0, 1, 2$ et 3 .

Or :

$$\Delta Q_c(t) = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t - \tau_A + \tau) d\tau \tag{44}$$

$$\text{où } \begin{cases} x_2(w) = 0 \\ \text{si } w \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(w) = X_2(w) \\ \text{si } w > 0 \end{cases} \tag{45}$$

1° - La première valeur, $\Delta Q_c(0)$, est donc évidente :

$$\Delta Q_c(0) = 0 \quad \text{puisque } (0 - \tau_A + \tau) \leq 0 \tag{46}$$

2° - Quant aux trois autres intégrales, $\Delta Q_c(jh)$, compte tenu de la contrainte (45), elles peuvent se réduire à la partie qui correspond

à la portion utile de l'intervalle d'intégration :

$$\Delta Q_c(jh) = u_1 \int_{\tau_A - jh}^{\tau_A} f(\tau) x_2(jh - \tau_A + \tau) d\tau \quad (j = 1, 2 \text{ et } 3)$$

Remarquons que pour $(\tau_A - 3h \leq \tau \leq \tau_A)$, la fonction $f(\tau)$ reste constante. En effet $f(\tau)$ est une fonction "escalier" dont les discontinuités sont séparées par un intervalle $\Delta \tau$ bien supérieur à $3h$. Or τ_A coïncide avec l'une de ces discontinuités. D'où :

$$f(\tau) = f_a \quad \text{pour } \tau_A - 3h \leq \tau \leq \tau_A \quad (47)$$

Les intégrales peuvent donc s'écrire :

$$\Delta Q_c(jh) = u_1 f_a \int_{\tau_A - jh}^{\tau_A} x_2(jh - \tau_A + \tau) d\tau$$

soit, après changement de variable $t' = jh - \tau_A + \tau$

$$\Delta Q_c(jh) = u_1 f_a \int_0^{jh} x_2(t') dt' \quad (\text{pour } j = 1, 2 \text{ et } 3).$$

En interpolant $x_2(t)$ par un polynôme sur le support $(0, h, 2h \text{ et } 3h)$ puis en intégrant ce dernier sur $[0, h]$, $[0, 2h]$ et $[0, 3h]$ nous obtenons les formes approchées :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Delta Q_c(h)}} &= u_1 f_a \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(h) \\ x_2(2h) \\ x_2(3h) \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{\Delta Q_c(2h)}} &= u_1 f_a \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(h) \\ x_2(2h) \\ x_2(3h) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\underline{\underline{\Delta Q_c (3h)}} = u_1 f_a \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 (0) \\ x_2 (h) \\ x_2 (2h) \\ x_2 (3h) \end{bmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{3h}{8} & \gamma_1 &= \frac{h}{3} & \delta_1 &= \frac{3h}{8} \\ \beta_2 &= \frac{19h}{24} & \gamma_2 &= \frac{4h}{3} & \delta_2 &= \frac{9h}{8} \\ \beta_3 &= \frac{5h}{24} & \gamma_3 &= \frac{h}{3} & \delta_3 &= \frac{9h}{8} \\ \beta_4 &= \frac{h}{24} & \gamma_4 &= 0 & \delta_4 &= \frac{3h}{8} \end{aligned} \quad (49)$$

Remplaçons dans le système (43) donnant l'expression des intégrales $\int_{jh}^{(j+1)h} \Delta Q_c (t) dt$, les quantités $\Delta Q_c (ih)$ par les valeurs approchées (48) en tenant compte du fait que :

$$x_2 (0) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta Q_c (0) = 0$$

nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \int_0^h \Delta Q_c (t) dt \\ \int_h^{2h} \Delta Q_c (t) dt \\ \int_{2h}^{3h} \Delta Q_c (t) dt \end{bmatrix} = u_1 f_a \begin{bmatrix} \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \beta_2' & \beta_3' & \beta_4' \\ \beta_2'' & \beta_3'' & \beta_4'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 (h) \\ x_2 (2h) \\ x_2 (3h) \end{bmatrix} \quad (50)$$

c'est-à-dire, en simplifiant l'écriture en vue d'une introduction plus facile dans le système global d'"amorçage" :

$$\begin{bmatrix} \int_0^h \Delta Q_c(t) dt \\ \int_h^{2h} \Delta Q_c(t) dt \\ \int_{2h}^{3h} \Delta Q_c(t) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U A_2 & U A_3 & U A_4 \\ V A_2 & V A_3 & V A_4 \\ W A_2 & W A_3 & W A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(h) \\ x_2(2h) \\ x_2(3h) \end{bmatrix} \quad (51)$$

où

$$\begin{cases} UA_2 = u_1 f_a (\beta_2^2 + \beta_3 \gamma_2 + \beta_4 \delta_2) \\ UA_3 = u_1 f_a (\beta_2 \beta_3 + \beta_3 \gamma_3 + \beta_4 \delta_3) \\ UA_4 = u_1 f_a (\beta_2 \beta_4 + \beta_3 \gamma_4 + \beta_4 \delta_4) \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{cases} VA_2 = u_1 f_a (\beta'_2 \beta_2 + \beta'_3 \gamma_2 + \beta'_4 \delta_2) \\ VA_3 = u_1 f_a (\beta'_2 \beta_3 + \beta'_3 \gamma_3 + \beta'_4 \delta_3) \\ VA_4 = u_1 f_a (\beta'_2 \beta_4 + \beta'_3 \gamma_4 + \beta'_4 \delta_4) \end{cases} \quad (53)$$

$$\begin{cases} WA_2 = u_1 f_a (\beta''_2 \beta_2 + \beta''_3 \gamma_2 + \beta''_4 \delta_2) \\ WA_3 = u_1 f_a (\beta''_2 \beta_3 + \beta''_3 \gamma_3 + \beta''_4 \delta_3) \\ WA_4 = u_1 f_a (\beta''_2 \beta_4 + \beta''_3 \gamma_4 + \beta''_4 \delta_4) \end{cases} \quad (54)$$

b) Calcul de $\int_{jh}^{(j+1)h} \underline{\Delta Q}_{gv}(t) dt$ pour $j = 0, 1$ et 2

Ce calcul est identique et nous pouvons également écrire que la relation :

$$\Delta Q_{gv}(t) = \int_0^\theta f(\tau) x_2(t - \theta + \tau) d\tau \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_2(w) = 0 \\ \text{si } w \leq 0 \end{cases}$$

est équivalente, pendant cette phase d'amorçage à :

$$\Delta Q_{gv}(t) = \int_{\theta-t}^{\theta} f(\tau) x_2(t - \theta + \tau) d\tau$$

Comme :

$$f(\tau) = f_t \quad \text{pour} \quad \theta - 3h \leq \tau \leq \theta$$

$$\Delta Q_{gv}(jh) = f_t \int_0^{jh} x_2(t') dt'$$

Nous obtenons un système de même forme que le précédent :

$$\begin{bmatrix} \int_0^h \Delta Q_{gv}(t) dt \\ \int_h^{2h} \Delta Q_{gv}(t) dt \\ \int_{2h}^{3h} \Delta Q_{gv}(t) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} UT_2 & UT_3 & UT_4 \\ VT_2 & VT_3 & VT_4 \\ WT_2 & WT_3 & WT_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(h) \\ x_2(2h) \\ x_2(3h) \end{bmatrix} \quad (55)$$

avec

$$\begin{cases} UT_2 = f_t (\beta_2^2 + \beta_3 \gamma_2 + \beta_4 \delta_2) \\ UT_3 = f_t (\beta_2 \beta_3 + \beta_3 \gamma_3 + \beta_4 \delta_3) \\ UT_4 = f_t (\beta_2 \beta_4 + \beta_3 \gamma_4 + \beta_4 \delta_4) \end{cases} \quad (56)$$

$$\begin{cases} VT_2 = f_t (\beta_2' \beta_2 + \beta_3' \gamma_2 + \beta_4' \delta_2) \\ VT_3 = f_t (\beta_2' \beta_3 + \beta_3' \gamma_3 + \beta_4' \delta_3) \\ VT_4 = f_t (\beta_2' \beta_4 + \beta_3' \gamma_4 + \beta_4' \delta_4) \end{cases} \quad (57)$$

$$\begin{cases} WT_2 = f_t (\beta_2'' \beta_2 + \beta_3'' \gamma_2 + \beta_4'' \delta_2) \\ WT_3 = f_t (\beta_2'' \beta_3 + \beta_3'' \gamma_3 + \beta_4'' \delta_3) \\ WT_4 = f_t (\beta_2'' \beta_4 + \beta_3'' \gamma_4 + \beta_4'' \delta_4) \end{cases} \quad (58)$$

c) Forme finale de $\int_{jh}^{(j+1)h} \varphi dt$ en fonction de X_1, X_2 et X_3 :-
(j = 0, 1 et 2)

Nous avons vu que :

$$\int_{jh}^{(j+1)h} \varphi_k dt = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, 4 \text{ et } 5 \quad (\forall j)$$

et que, sur l'intervalle de la phase d'"amorçage", en vertu de (42) :

$$\int_{jh}^{(j+1)h} \varphi_3 dt = \int_{jh}^{(j+1)h} \Delta Q_c(t) dt + \frac{u_3}{1-u_3} \int_{jh}^{(j+1)h} \Delta Q_{gv}(t) dt \quad (59)$$

$$\int_{jh}^{(j+1)h} \varphi_6 dt = \int_{jh}^{(j+1)h} \Delta Q_{gv}(t) dt \quad (60)$$

Remplaçons les intégrales des seconds membres par leur valeur établie ci-dessus :

$$\begin{bmatrix} \int_0^h \varphi_3 dt \\ \int_h^{2h} \varphi_3 dt \\ \int_{2h}^{3h} \varphi_3 dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} UM_2 & UM_3 & UM_4 \\ VM_2 & VM_3 & VM_4 \\ WM_2 & WM_3 & WM_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(h) \\ x_2(2h) \\ x_2(3h) \end{bmatrix} \quad (61)$$

où :

$$\begin{aligned}
 UM_k &= UA_k + \frac{u_3}{1-u_3} UT_k && \text{pour } k = 2, 3 \text{ et } 4 \\
 VM_k &= VA_k + \frac{u_3}{1-u_3} VT_k && " \\
 WM_k &= WA_k + \frac{u_3}{1-u_3} WT_k && "
 \end{aligned} \tag{62}$$

De même, pour le dernier élément de φ , nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \int_0^h \varphi_6 dt \\ \int_h^{2h} \varphi_6 dt \\ \int_{2h}^{3h} \varphi_6 dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} UT_2 & UT_3 & UT_4 \\ VT_2 & VT_3 & VT_4 \\ WT_2 & WT_3 & WT_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(h) \\ x_2(2h) \\ x_2(3h) \end{bmatrix} \tag{63}$$

D'où la forme finale :

$$\int_0^h \underline{\underline{\varphi}} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ [UM_2 \quad UM_3 \quad UM_4] \\ 0 \\ 0 \\ [UT_2 \quad UT_3 \quad UT_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(h) \\ x_2(2h) \\ x_2(3h) \\ x_2(h) \\ x_2(2h) \\ x_2(3h) \end{bmatrix} \tag{64}$$

Deux relations analogues où les lettres U sont remplacées par V et par W donnent successivement

$$\int_h^{2h} \underline{\underline{\varphi}} dt \quad \text{et} \quad \int_{2h}^{3h} \underline{\underline{\varphi}} dt$$

B - 3 Formation du système d'"amorçage"

Le principe de la méthode nous conduisait au système global formé de 3 systèmes partiels non indépendants (37) :

$$\begin{aligned} X(h) - X(0) &= [B] \left[\int_0^h X dt \right] + \left[\int_0^h \varphi dt \right] \\ X(2h) - X(h) &= [B] \left[\int_h^{2h} X dt \right] + \left[\int_h^{2h} \varphi dt \right] \\ X(3h) - X(2h) &= [B] \left[\int_{2h}^{3h} X dt \right] + \left[\int_{2h}^{3h} \varphi dt \right] \end{aligned} \quad (65)$$

En remplaçant les intégrales de X et de φ par les valeurs établies en (38) et (64), nous obtenons 3 systèmes partiels linéaires non indépendants, dont nous explicitons le premier en exemple :

$$X(h) - X(0) = [B] \left[\beta_1 X(0) + \beta_2 X(h) + \beta_3 X(2h) + \beta_4 X(3h) \right] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ [UM_2 \quad UM_3 \quad UM_4] \\ 0 \\ 0 \\ [UT_2 \quad UT_3 \quad UT_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(h) \\ x_2(2h) \\ x_2(3h) \\ x_2(h) \\ x_2(2h) \\ x_2(3h) \end{bmatrix} \quad (66)$$

Dans le second système partiel donnant $X(2h) - X(h)$, les coefficients β_i , UM_i et UT_i sont remplacés par β'_i , VM_i et VT_i . Pour le 3^{ème} système ce sont β''_i , WM_i et WT_i qui interviennent.

Le système global est donc composé de (3×6) équations linéaires. Après avoir regroupé les termes dépendant des inconnues $X(h)$, $X(2h)$ et $X(3h)$ et en particulier les seconds éléments de ces tableaux $x_2(h)$, $x_2(2h)$ et $x_2(3h)$, nous pouvons mettre ce système global sous la forme :





$$[C] [X_a] = [E] \quad (67)$$

où X_a est la matrice colonne formée des 3 sous-matrices $X(h)$, $X(2h)$ et $X(3h)$.

Ce système est détaillé page 78.

C - Initialisation de la phase itérative

Nous avons supposé connus les différents résultats intermédiaires utilisés après décalage dans plusieurs itérations successives. Chaque nouveau calcul de $X(t_i + h)$ nécessite la connaissance de

$$Y_1, Y_2 \text{ et } Y_3 (= \Delta Q_c(t_i - k h) \text{ où } k = 2, 1 \text{ et } 0)$$

$$Z_1, Z_2 \text{ et } Z_3 (= \Delta Q_{gv}(t_i - k h) \text{ où } k = 2, 1 \text{ et } 0)$$

$$SQGV(t_i - u_5) = \int_{t_i - u_5}^{t_i - u_5 + h} \Delta Q_{gv}(t) dt$$

$\Delta Q_c(t)$ et $\Delta Q_{gv}(t)$ étant donnés par les relations (5) et (6).

D'autre part pour le calcul de Y_{14} et Z_{14} , intégrales de la forme :

$$\int_0^{a-h} f(\tau) x_2(t - a + \tau) d\tau$$

nous avons besoin de :

$$x_2(t_i - k h) \quad \text{pour } k = 0, 1, 2 \dots \left(\frac{\theta}{h}\right)$$

$$\int_{t_i - kh}^{t - (k-1)h} x_2(t) dt \quad \text{pour } k = 1, 2, 3 \dots \left(\frac{\theta}{h} + 1\right)$$

(voir au chapitre IV).

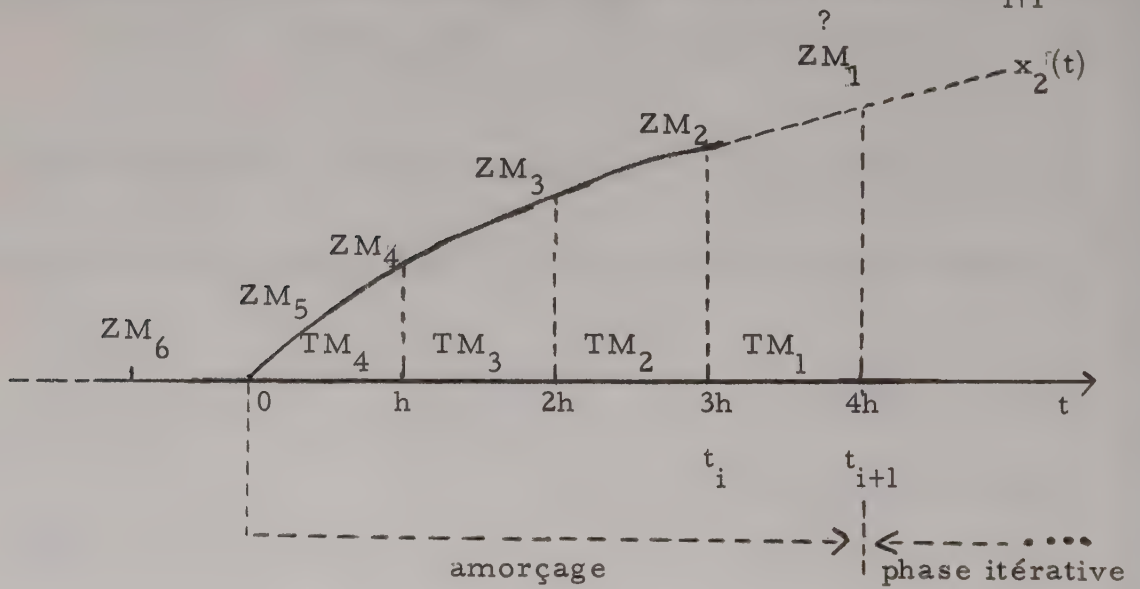
La phase itérative débute à $t = 4 h$ (soit $t_{i+1} = 4 h$ dans nos formules)

Nous devons donc initialiser toutes ces grandeurs. Pour cela nous effectuerons successivement :

- la mise en mémoire de $x_2(t_i - kh)$
- le calcul et la mise en mémoire de $\int_{t_i - kh}^{t_i - (k-1)h} x_2(t) dt$
- l'initialisation de Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2 et Z_3
- le calcul et la mise en mémoire de $\int_{t_i}^{t_i - (k-1)h} \Delta Q_{gv}(t) dt$

C - 1 Mise en mémoire de $x_2(t_i - kh)$ et de $\int_{t_i}^{t_i - (k-1)h} x_2(t) dt$

Dans tout notre travail, t_i désigne le dernier point connu. Le premier point calculé pendant la phase itérative est donc $t_{i+1} = 4h$:



1° - La fonction $x_2(t_i - kh)$, élément de la solution $X(t_i - kh)$, a été calculée, pendant l'amorçage aux points $(t_i - kh) = h, 2h$ et $3h$.

D'autre part, rappelons la contrainte :

$$x_2(w) = 0 \quad \text{si } w \leq 0 \quad (68)$$

Nous poserons donc, pour $k = 0, 1, 2 \dots \frac{\theta}{h}$

$$\begin{aligned} \text{ZM } (k+2) &= x_2(t_i - kh) && \text{pour } t_i - kh > 0 \\ \text{ZM } (k+2) &= 0 && \text{pour } t_i - kh \leq 0 \end{aligned} \quad (69)$$

c'est-à-dire pour entreprendre la phase itérative où $t_i = 3h$

$$\begin{aligned} \text{ZM } (2) &= x_2(3h) \\ \text{ZM } (3) &= x_2(2h) \\ \text{ZM } (4) &= x_2(h) \\ \text{ZM } (j) &= 0 && \text{pour : } 5 \leq j \leq \frac{\theta}{h} + 1 \end{aligned} \quad (70)$$

2° - La valeur de l'intégrale $\int_{t_i - kh}^{t_i - (k-1)h} x_2(t) dt$ pour $k = 1, 2 \dots \frac{\theta}{h} + 1$, doit être conservée en mémoire.

Or, d'après la contrainte (6c), nous constatons que :

$$\int_{t_i - kh}^{t_i - (k-1)h} x_2(t) dt = 0 \quad \text{si } t_i - (k-1)h \leq 0 \quad (70')$$

En posant donc en fin d'amorçage :

$$\text{TM } (k+1) = \int_{t_i - kh}^{t_i - (k-1)h} x_2(t) dt \quad \text{si } k = 1, 2 \text{ et } 3 \quad (71)$$

$$\text{TM } (k+1) = 0 \quad \text{si } 4 \leq k \leq \frac{\theta}{h} \quad (72)$$

Le calcul de ces trois premières intégrales se fait par l'intermédiaire d'une interpolation de $x_2(t)$ sur le support $(0, h, 2h \text{ et } 3h)$:

$$\text{TM (2)} = \int_{2h}^{3h} x_2(t) dt = \begin{bmatrix} \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' & \beta_4'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(h) \\ x_2(2h) \\ x_2(3h) \end{bmatrix} \quad (73)$$

d'où :

$$\text{TM (2)} = \int_{2h}^{3h} x_2(t) dt = \begin{bmatrix} \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' & \beta_4'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ ZM_4 \\ ZM_3 \\ ZM_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{TM (3)} = \int_h^{2h} x_2(t) dt = \begin{bmatrix} \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' & \beta_4' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ ZM_4 \\ ZM_3 \\ ZM_2 \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$\text{TM (4)} = \int_0^h x_2(t) dt = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ ZM_4 \\ ZM_3 \\ ZM_2 \end{bmatrix} \quad (75)$$

où les coefficients β_i , β_i' et β_i'' ont été donnés précédemment (39).

C - 2 Initialisation de Y_1 , Y_2 , Y_3 , Z_1 , Z_2 et Z_3

1° - Calcul de Y_1 , Y_2 et Y_3

Nous avons posé (relation 34) :

$$Y_1 = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(h - \tau_A + \tau) d\tau \quad (= \Delta Q_c(h))$$

$$Y_2 = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2 (2h - \tau_A + \tau) d\tau \quad (= \Delta Q_c (2h))$$

$$Y_3 = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2 (3h - \tau_A + \tau) d\tau \quad (= \Delta Q_c (3h))$$

Or, d'après la contrainte :

$$x_2(w) = 0 \quad \text{si } w \leq 0$$

et comme τ_A est supérieur à $3h$, ces relations deviennent :

$$Y_1 = u_1 \int_{\tau_A - h}^{\tau_A} f(\tau) x_2 (h - \tau_A + \tau) d\tau$$

$$Y_2 = u_1 \int_{\tau_A - 2h}^{\tau_A} f(\tau) x_2 (2h - \tau_A + \tau) d\tau$$

$$Y_3 = u_1 \int_{\tau_A - 3h}^{\tau_A} f(\tau) x_2 (3h - \tau_A + \tau) d\tau$$

D'autre part, nous avons vu que $f(\tau)$ restait constante sur cet intervalle (relation 47)

$$f(\tau) = f_a \quad \text{pour } \tau_A - 3h \leq \tau \leq \tau_A$$

Après changement de variable ($t = kh - \tau_A + \tau$), nous obtenons :

$$Y_1 = f_a \int_0^h x_2(t) dt$$

$$Y_2 = f_a \int_0^{2h} x_2(t) dt$$

$$Y_3 = f_a \int_0^{3h} x_2(t) dt$$

c'est-à-dire, d'après les formules (73), (74) et (75) :

$$\begin{aligned} Y_1 &= f_a \cdot TM(4) \\ Y_2 &= f_a \cdot (TM(4) + TM(3)) \\ Y_3 &= f_a \cdot (TM(4) + TM(3) + TM(2)) \end{aligned} \quad (76)$$

2° - Calcul de Z_1 , Z_2 et Z_3

Par définition, ces grandeurs sont égales à :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int_0^\theta f(\tau) x_2(h - \theta + \tau) d\tau & (= \Delta Q_{gv}(h)) \\ Z_2 &= \int_0^\theta f(\tau) x_2(2h - \theta + \tau) d\tau & (= \Delta Q_{gv}(2h)) \\ Z_3 &= \int_0^\theta f(\tau) x_2(3h - \theta + \tau) d\tau & (= \Delta Q_{gv}(3h)) \end{aligned}$$

Le calcul est analogue à celui de Y_1 , Y_2 et Y_3 puisque nous avons de même :

$$x_2(w) = 0 \quad \text{si } w \leq 0$$

et que :

$$f(\tau) = f_t \quad \text{si } \theta - 3h \leq \tau \leq \theta$$

avec :

$$\theta > \tau_A > 3h$$

Il conduit aux formules :

$$\begin{aligned} Z_1 &= f_t \int_0^h x_2(t) dt = f_t \cdot TM(4) \\ Z_2 &= f_t \int_0^{2h} x_2(t) dt = f_t \cdot (TM(4) + TM(3)) \\ Z_3 &= f_t \int_0^{3h} x_2(t) dt = f_t \cdot (TM(4) + TM(3) + TM(2)) \end{aligned} \quad (77)$$

C - 3 Calcul et mise en mémoire de $\int_{t_i}^{t_i+h} \Delta Q_{gv}(t) dt$

Cette quantité, calculée à chaque itération (i) sera utilisée à l'itération $(i + \frac{u_5}{h})$. Entre temps, elle est conservée dans le tableau SQGV :

$$SQGV(1) = \int_{t_i}^{t_i+h} \Delta Q_{gv}(t) dt$$

.....

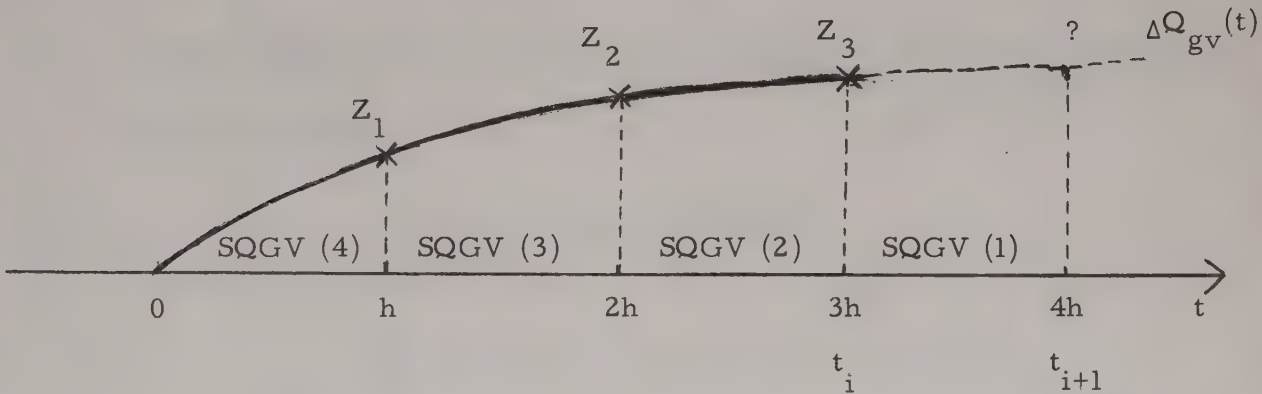
$$SQGV(k) = \int_{t_i-(k-1)h}^{t_i-(k-2)h} \Delta Q_{gv}(t) dt \quad (78)$$

.....

$$SQGV(k) = 0 \quad \text{si } t_i - (k-2)h \leq 0$$

Pour l'initialisation de la phase itérative : le dernier point connu

est : $t_i = 3h$



Nous avons donc :

$$SQGV(k) = 0 \quad \text{si } k \geq 5 \quad (79)$$

$$SQGV(k) = \int_{(4-k)h}^{(5-k)h} \Delta Q_{gv}(t) dt \quad \text{pour } k = 1, 2, 3 \text{ et } 4$$

Or, nous connaissons :

$$\Delta Q_{gv}(0) = 0$$

$$\Delta Q_{gv}(h) = Z_1$$

(voir formule 77)

$$\Delta Q_{gv}(2h) = Z_2$$

$$\Delta Q_{gv}(3h) = Z_3$$

L'intégration après interpolation de la fonction $\Delta Q_{gv}(t)$ sur l'intervalle connu après la phase d'amorçage ($0 \leq t \leq 3h$) conduit aux relations :

$$SQGV(2) = \begin{bmatrix} \beta''_1 & \beta''_2 & \beta''_3 & \beta''_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_{gv}(0) \\ \Delta Q_{gv}(h) \\ \Delta Q_{gv}(2h) \\ \Delta Q_{gv}(3h) \end{bmatrix}$$

soit :

$$SQGV(2) = \begin{bmatrix} \beta''_2 & \beta''_3 & \beta''_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} \quad (80)$$

de même

$$SQGV(3) = \begin{bmatrix} \beta'_2 & \beta'_3 & \beta'_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$SQGV(4) = \begin{bmatrix} \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} \quad (82)$$

Le premier élément SQGV (1) ne fait pas partie des initialisations puisqu'il dépend de $X(4h)$, première valeur calculée de la solution du système intégral-différentiel pendant la phase itérative. Il sera donné en fin d'itération par la relation :

$$SQGV (1) = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} \quad (83)$$

où $Z_4 = \Delta Q_{gv} (4h)$ (calculé d'après (23) en fonction de $x_2 (4h)$).

D : Organisation des calculs de la méthode à pas liés, implicite

Elle est représentée par l'organigramme (page 88) qui schématise les différentes étapes :

- l'initialisation générale
- la phase d'"amorçage" $(0 \leq t \leq 3h)$
- l'initialisation de la phase itérative
- la phase itérative $(t > 3h)$.

III - LA METHODE A PAS LIES, IMPLICITE, AVEC VARIATION DU PAS D'INTEGRATION

Rappelons le système initial

$$\frac{d}{dt} X = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} X + \varphi \quad (84)$$

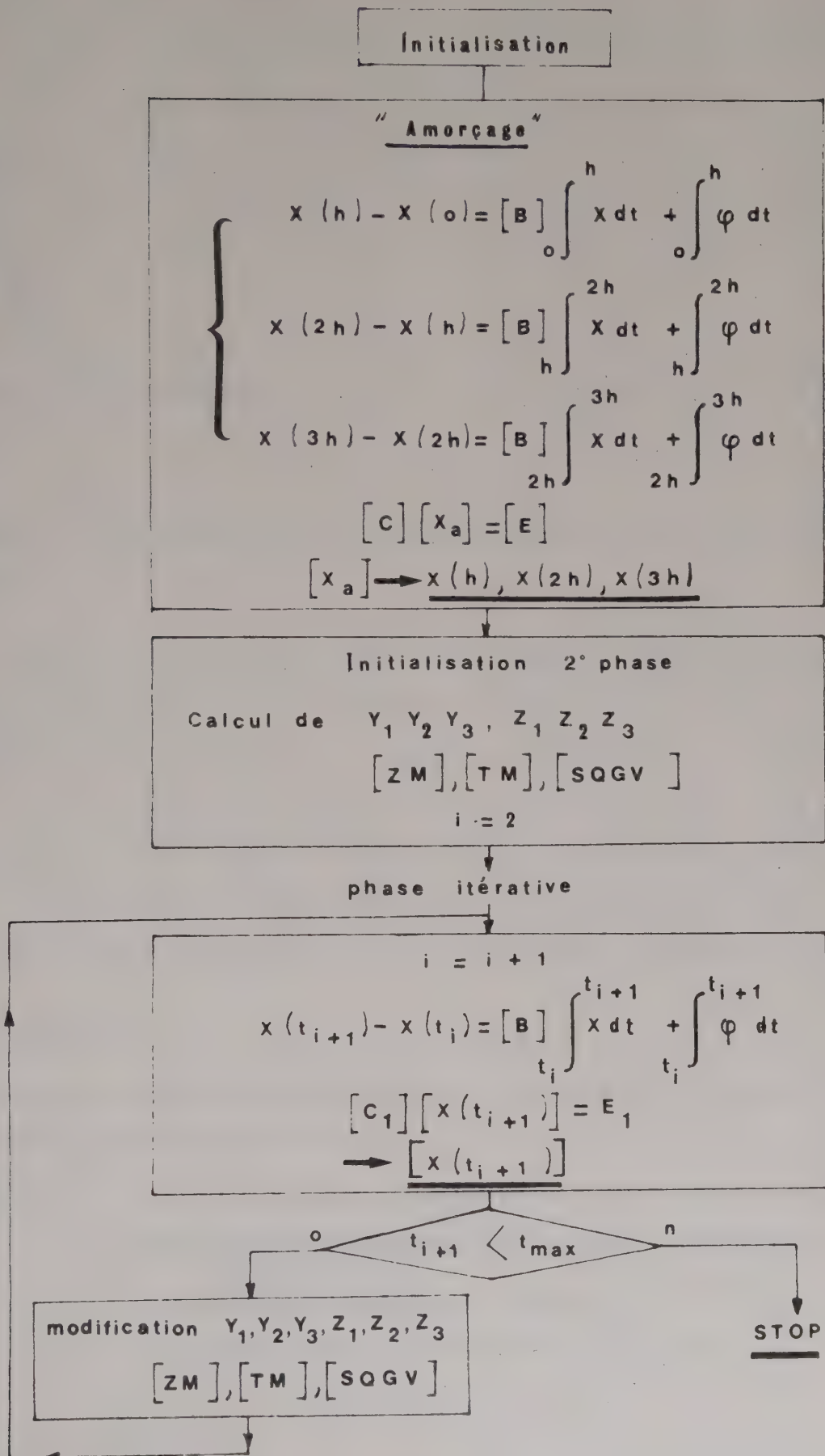
où le tableau φ dépend essentiellement d'intégrales du type :

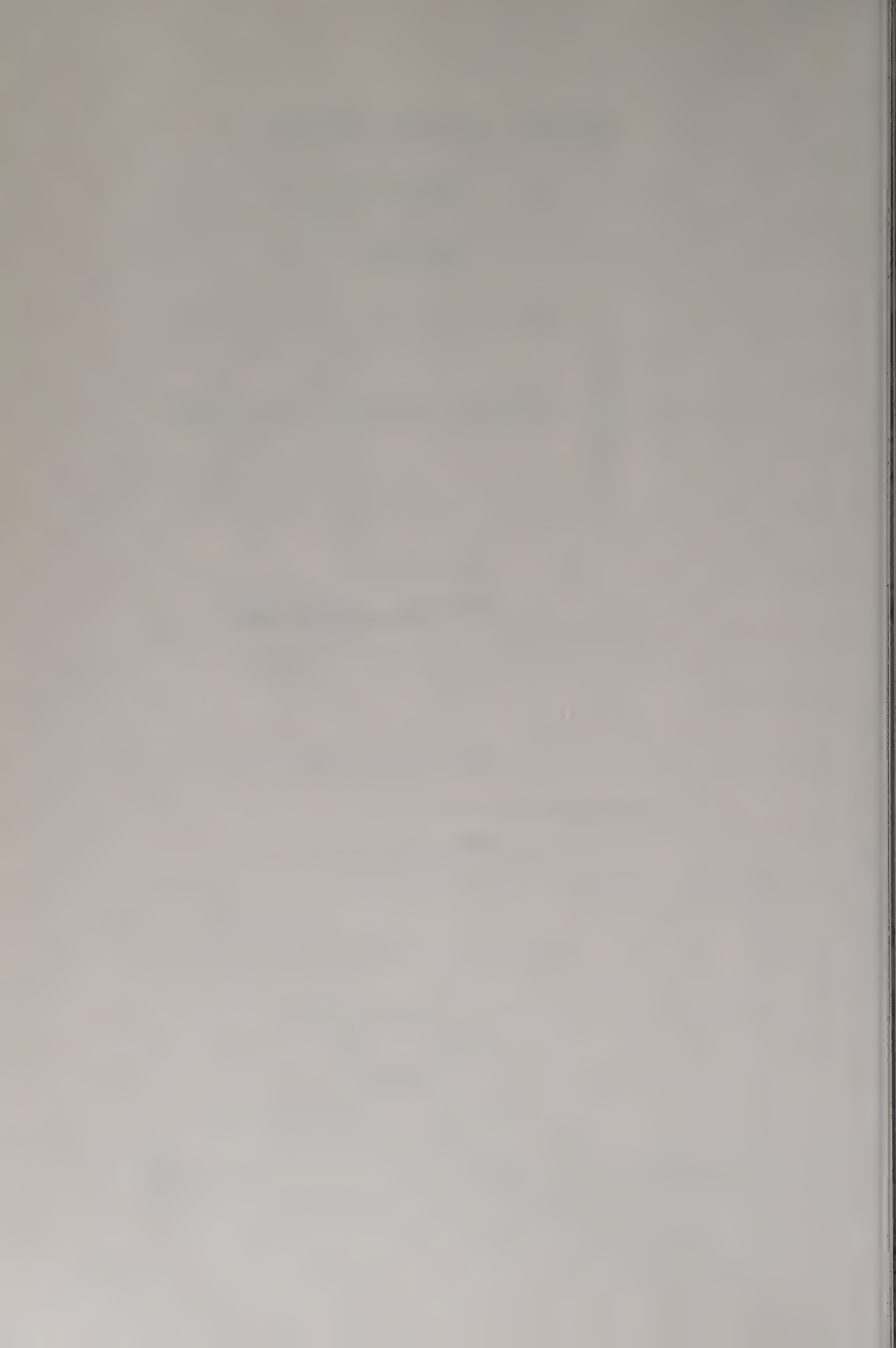
$$\int_0^a f(\tau) x_2(t - a + \tau) d\tau \quad \text{où} \quad \begin{cases} x_2(w) = 0 \\ \text{si } w \leq 0 \end{cases} \quad (85)$$

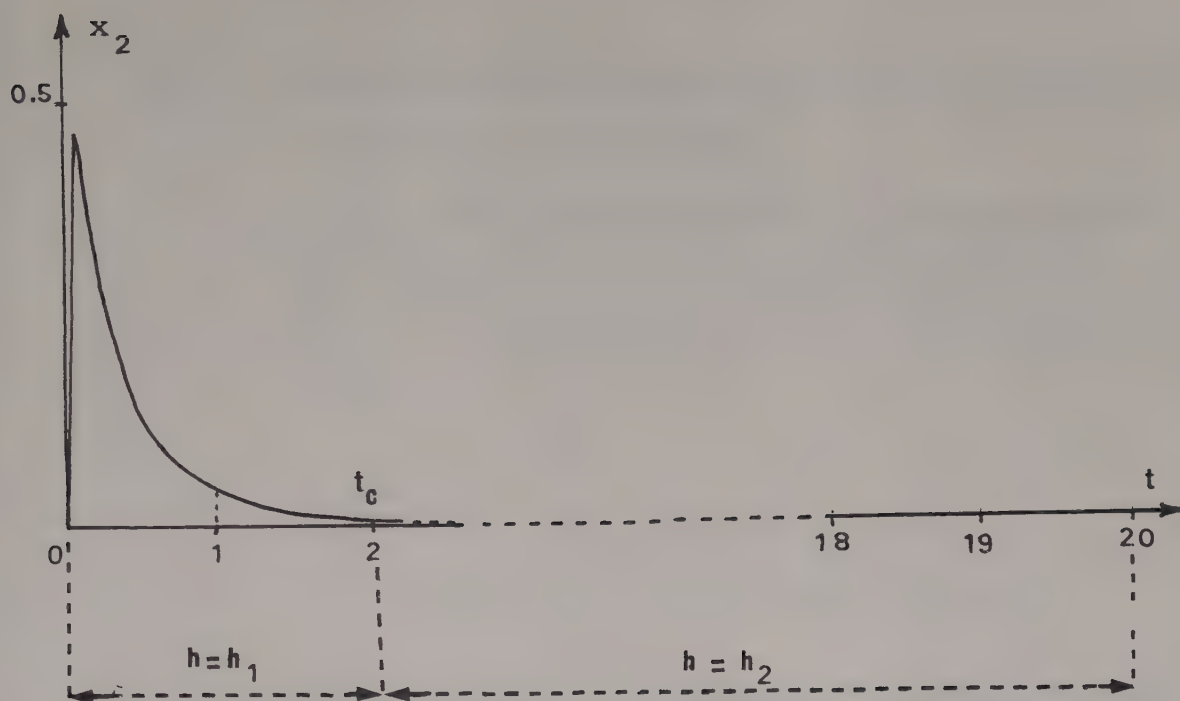
Or, nous avons vu que cette fonction $x_2(t)$, élément de la solution X du système (84), possède un maximum très aigu sur la première partie de l'intervalle étudié :



Methode à pas liés, implicite







Sur cette première partie de l'intervalle $[0, t_c]$, le calcul de $x_2(t)$ et des intégrales (rel. 85) est rendu délicat par l'existence de ce maximum. Il exige une faible valeur du pas d'intégration pour donner des résultats précis.

Sur la seconde partie de l'intervalle, soit $[t_c, 20]$, une précision comparable peut être obtenue avec une valeur plus élevée du pas d'intégration. Les calculs en deviennent alors beaucoup moins coûteux en "temps-machine" puisque ce dernier peut être ainsi réduit au cinquième de sa valeur.

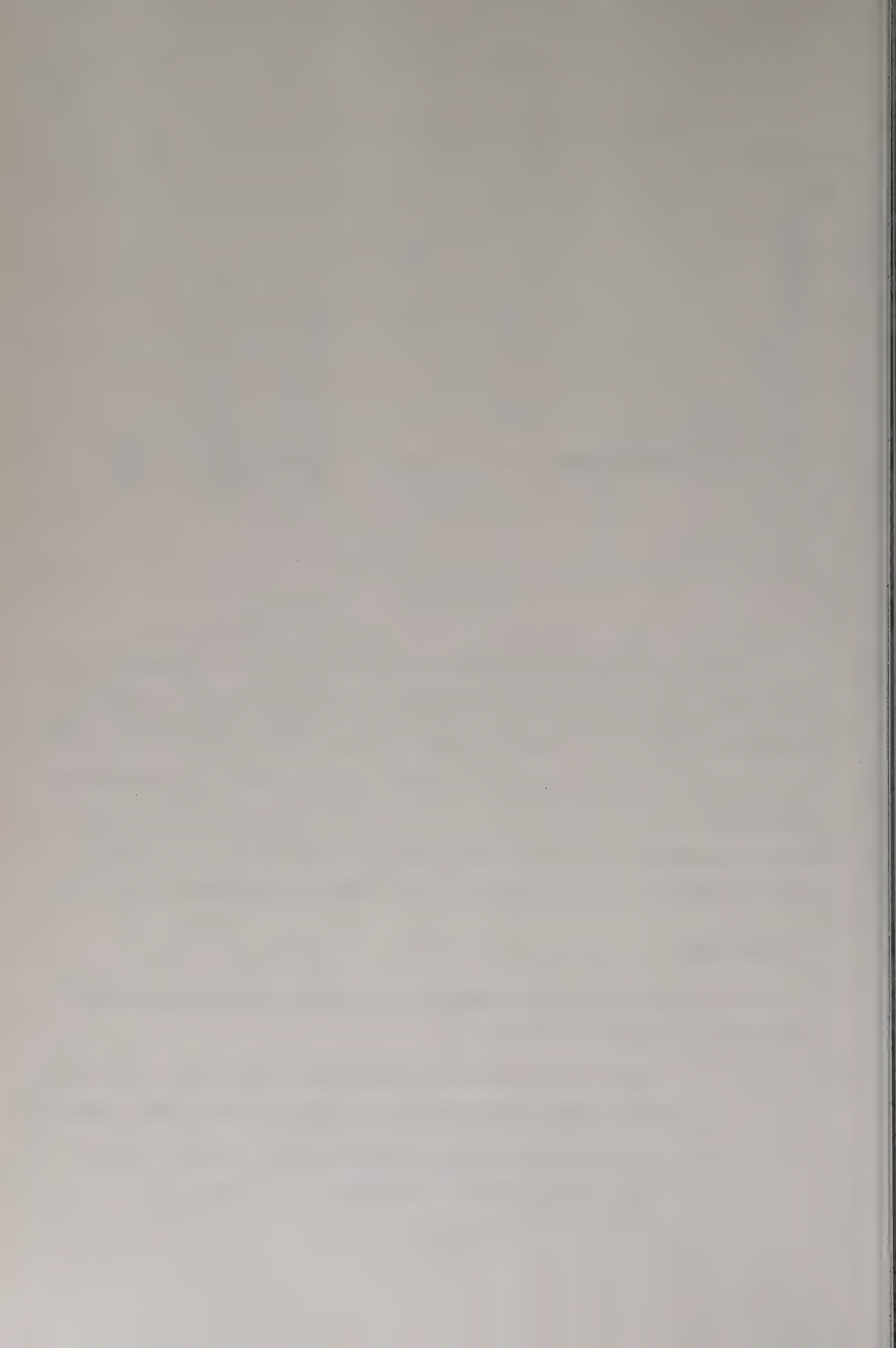
A : La méthode

C'est une variante de la précédente où la résolution du système intégral-différentiel se fait en deux parties :

1) $0 \leq t < t_c$: Les calculs sont identiques à ceux de la méthode précédente, le pas d'intégration prenant une valeur h_1 . Cette partie comprend

- une phase d'"amorçage" donnant $X(h_1)$, $X(2h_1)$, $X(3h_1)$
- une phase itérative fournissant $X(t_{i+1})$ où :

$$t_{i+1} = 4h_1, 5h_1, \dots, t_c$$



- 2) $t \geq t_c$: Cette seconde partie comporte seulement une phase itérative avec un pas h_2 supérieur à h_1 .

Une phase d'"amorçage" n'est plus nécessaire car si nous prenons h_2 égal à un multiple de h_1 les valeurs nécessaires de $X(t)$ pour le calcul de $X(t_c + h_2)$ ont été calculées en première partie :

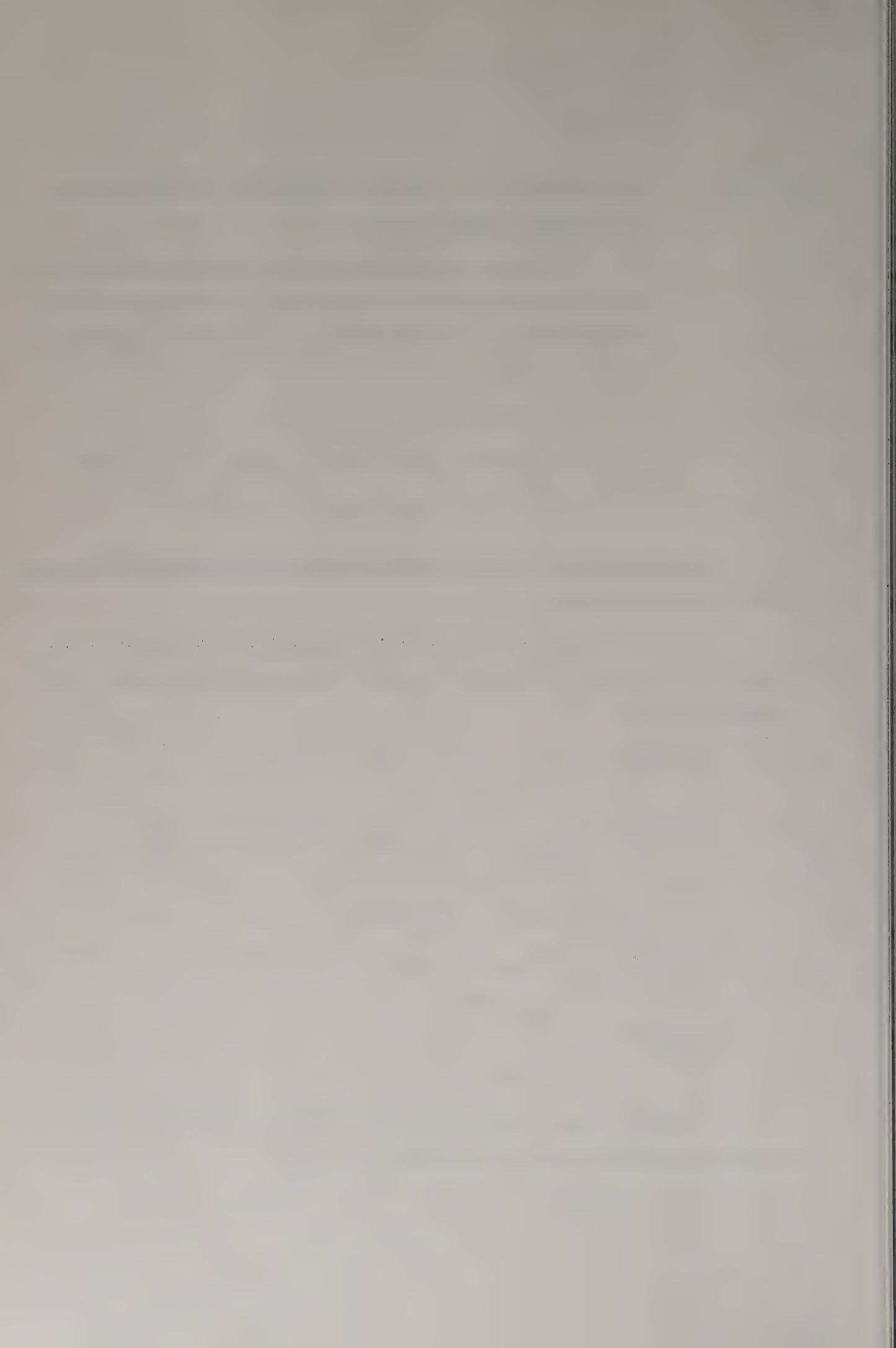
$$\begin{aligned} X_i &= X(t_c) \\ X_{i-1} &= X(t_c - h_2) = X(t_c - n_c h_1) \\ X_{i-2} &= X(t_c - 2h_2) = X(t_c - 2 n_c h_1) \end{aligned} \quad (86)$$

Par contre, une nouvelle initialisation des identificateurs de la phase itérative est nécessaire.

En effet, comme nous l'avons vu au moment de la transition entre la phase d'"amorçage" et la phase itérative cette dernière nécessite la connaissance de :

$$\begin{aligned} \cdot \text{ ZM } (k+2) &= x_2(t_c - k h_2) \quad \text{pour } k = 0, 1, 2 \dots \frac{\theta}{h_2} \\ \cdot \text{ TM } (k+1) &= \int_{t_i - k h_2}^{t_i - (k-1) h_2} x_2(t) dt \quad \text{pour } k = 1, 2, 3 \dots \left(\frac{\theta}{h_2} + 1\right) \\ \cdot \text{ Y}_1, \text{ Y}_2, \text{ Y}_3 &= \Delta Q_c(t_c - k h_2) \quad \text{où } k = 2, 1, 0 \\ \cdot \text{ Z}_1, \text{ Z}_2, \text{ Z}_3 &= \Delta Q_{gv}(t_c - k h_2) \quad \text{où } k = 2, 1, 0 \\ \cdot \text{ SQGV } (k) &= \int_{t_i - (k-1) h_2}^{t_c - (k-2) h_2} \Delta Q_{gv}(t) dt \quad \text{pour } k = 2, 3, 4 \dots \left(\frac{u_5}{h_2} + 1\right) \end{aligned}$$

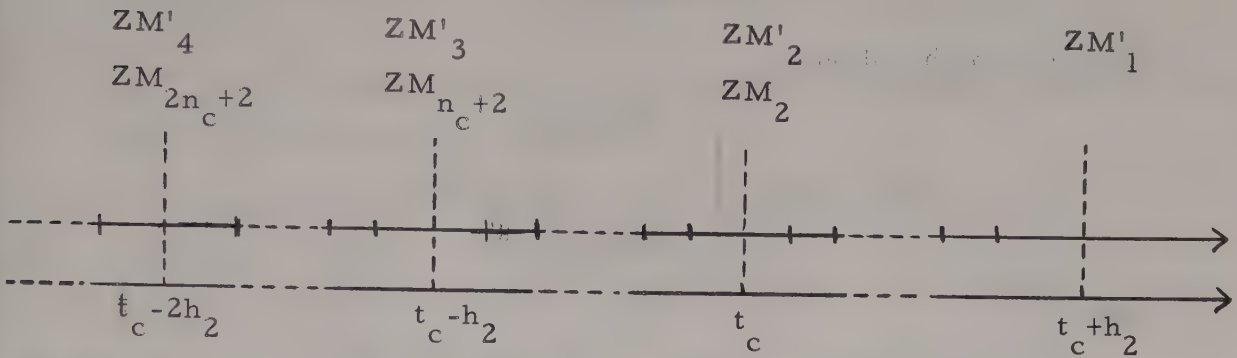
Il nous faut donc modifier tous ces résultats conservés en mémoire puisqu'ils dépendent de la valeur du pas.



B : Modification des grandeurs conservées en mémoire (initialisation de la seconde partie)

B - 1 Modification de ZM, tableau de rangement de $x_2(t)$

La valeur de $x_2(t)$ est indépendante du pas h , seul le rangement est modifié.



A la fin de la première partie, nous avons en mémoire

$$ZM(k+2) = x_2(t_c - kh_1) \quad \text{pour } k = 0, 1, 2 \dots \frac{\theta}{h_1}$$

et nous désirons :

$$ZM'(k+2) = x_2(t_c - kh_2) \quad \text{pour } k = 0, 1, 2 \dots \frac{\theta}{h_2}$$

Comme : $h_2 = n_c h_1$, la formule est immédiate :

$$ZM'(k+2) = ZM(n_c k+2) \quad \text{pour } k = 0, 1, 2 \dots \frac{\theta}{h_2} \quad (87)$$

B - 2 Modification de TM, tableau de rangement de $\int_{t_i}^{t_i+h} x_2(t) dt$:

Le tableau TM était donné par la relation (71) que nous pouvons écrire :

$$TM(k+2) = \int_{t_i - (k+1)h}^{t_i - kh} x_2(t) dt \quad \text{pour } k = 0, 1, 2 \dots \frac{\theta}{h} \quad (88)$$

Nous cherchons donc le nouveau tableau :

$$TM' (k+2) = \int_{t_c - (k+1)h_2}^{t_c - kh_2} x_2(t) dt$$

en fonction du tableau de la première partie :

$$TM (k+2) = \int_{t_c - (k+1)h_1}^{t_c - kh_1} x_2(t) dt$$

Or : $h_2 = n_c h_1$, d'où :

$$TM' (k+2) = \int_{t_c - (k+1)n_c h_1}^{t_c - k n_c h_1} x_2(t) dt$$

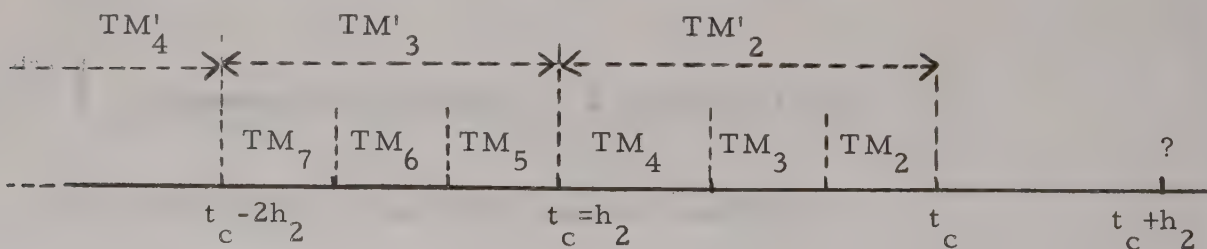
soit :

$$TM' (k+2) = \int_{t_c - (kn_c + n_c - 1)h_1}^{t_c - (kn_c + n_c - 1)h_1} x_2(t) dt + \int_{t_c - (kn_c + n_c - 1)h_1}^{t_c - (kn_c + n_c - 2)h_1} x_2(t) dt + \dots + \int_{t_c - (kn_c + 1)h_1}^{t_c - kn_c h_1} x_2(t) dt$$

c'est-à-dire :

$$TM' (k+2) = \sum_{j=1}^{n_c} TM (kn_c + 1 + j) \quad \text{pour } k = 0, 1, 2 \dots \frac{\theta}{h_2} \quad (8)$$

Ce qui revient à grouper les n_c valeurs de TM_1 consécutives comme sur cet exemple où $n_c = 3$.



B - 3 Modification de Y_1 , Y_2 et $Y_3 (= \Delta Q_c(t_c - kh_2))$ pour

$k = 2, 1, 0$

$\Delta Q_c(t)$ est indépendant de h :

$$\Delta Q_c(t) = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t - \tau_A + \tau) d\tau$$

Y_1 , Y_2 et Y_3 ont donc déjà été calculés en première partie puisque nous calculons à la fin de chaque itération :

$$Y_4 = \Delta Q_c(t_{i+1}) = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t_{i+1} - \tau_A + \tau) d\tau$$

Il est donc nécessaire de conserver, au cours des deux itérations concernées de la première partie :

$$\begin{aligned} YM_1 &= Y_4(t_c - 2n_c h_1) = \Delta Q_c(t_c - 2n_c h_1) \longrightarrow Y_1^* \\ YM_2 &= Y_4(t_c - n_c h_1) = \Delta Q_c(t_c - n_c h_1) \longrightarrow Y_2^* \\ Y_3 &= \Delta Q_c(t_c) \longrightarrow Y_3^* \end{aligned} \quad (90)$$

B - 4 Modification de Z_1 , Z_2 et Z_3 ($= \Delta Q_{gv}(t_c - kh_2)$ pour $k = 2, 1, 0$)

Ces quantités ont également été calculées au cours de la première partie où il faut prévoir leur mise en mémoire :

$$\begin{aligned} ZM_1 &= Z_4(t_c - 2n_c h_1) = \Delta Q_{gv}(t_c - 2n_c h_1) \longrightarrow Z_1^* \\ ZM_2 &= Z_4(t_c - n_c h_1) = \Delta Q_{gv}(t_c - n_c h_1) \longrightarrow Z_2^* \\ Z_3 &= \Delta Q_{gv}(t_c) \longrightarrow Z_3^* \end{aligned} \quad (91)$$

B - 5 Modification de SQGV, tableau de rangement de $\int_{t_i}^{t_i+h} \Delta Q_{gv}(t) dt$

Le rangement est analogue à celui de $\int_{t_i}^{t_i+h} x_2(t) dt$ dans TM
puisque :

$$SQGV(k+2) = \int_{t_i - (k+1)h}^{t_i - kh} \Delta Q_{gv}(t) dt \quad (92)$$

formule du même type que (88).

Le nouveau tableau SQGV' est donc composé des éléments :

$$SQGV' (k+2) = \sum_{j=1}^{n_c} SQGV (k n_c + 1 + j) \quad \text{où } k = 0, 1, 2 \dots \frac{u_5}{h_2} \quad (93)$$

IV - UNE AUTRE METHODE DE RESOLUTION DU SYSTEME INTEGRO-DIFFERENTIEL

Dans nos précédents travaux concernant la simulation de la Cinétique du Fer radioactif (11, 12, 13), nous avons employé une méthode "mixte" basée sur le principe de la méthode de Kutta-Runge mais faisant appel à une extrapolation pour le calcul des dérivées. Cette méthode comporte également deux phases :

- une phase d'"amorçage" : $t \leq 2 h$
- une phase itérative : $t > 2 h$

A : La phase itérative ($t > 2 h$)

Rappelons le système étudié :

$$\frac{d}{dt} X (t) = [B] X (t) + \varphi (t) \quad (94)$$

La méthode de Kutta-Runge du 3ème ordre conduit aux formules :

$$X (t_i + h) = X (t_i) + h \frac{dX}{dt} (t_i + \frac{h}{2}) \quad (95)$$

$$X (t_i + \frac{h}{2}) = X (t_i) + \frac{h}{2} \frac{dX}{dt} (t_i) \quad (96)$$

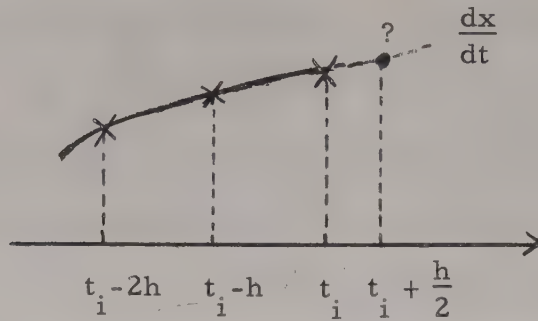
Pour chaque calcul d'un nouveau point $X (t_{i+1})$ il faut donc calculer :

$$\frac{dX}{dt} (t_i) \text{ et } \frac{dX}{dt} (t_i + \frac{h}{2}).$$

Or dans notre cas particulier (94), la recherche de ces deux dérivées entraîne le calcul de $\varphi(t_i)$ et $\varphi(t_i + \frac{h}{2})$. La répétition de ces calculs est coûteuse puisque $\varphi(t)$ est un tableau qui contient plusieurs intégrales du type :

$$\int_0^c f(\tau) x_2(t - c + \tau) d\tau \quad \text{où} \quad \begin{cases} x_2(w) = 0 \\ \text{si } w \leq 0 \end{cases} \quad (97)$$

Aussi, dans cette méthode "mixte", faisons nous appel, pour le calcul de $\frac{dX}{dt}(t_i + \frac{h}{2})$, à une extrapolation sur le support (t_{i-2}, t_{i-1}, t_i)



Chaque élément de $\frac{dX}{dt}(t)$ peut s'écrire :

$$\frac{dX}{dt}(t_i + \frac{h}{2}) = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] \begin{bmatrix} \frac{dX}{dt}(t_i - 2h) \\ \frac{dX}{dt}(t_i - h) \\ \frac{dX}{dt}(t_i) \end{bmatrix}$$

D'où, pour l'ensemble du tableau :

$$\frac{dX}{dt}(t_i + \frac{h}{2}) = \alpha_1 \frac{dX}{dt}(t_i - 2h) + \alpha_2 \frac{dX}{dt}(t_i - h) + \alpha_3 \frac{dX}{dt}(t_i) \quad (98)$$

où :

$$\alpha_1 = \frac{3}{8} \quad \alpha_2 = -\frac{5}{4} \quad \alpha_3 = \frac{15}{8} \quad (99)$$

Le nombre de calculs de $\varphi(t)$ et des intégrales (97) se trouve alors divisé par deux.

La méthode de calcul de ces intégrales est la même que celle qui est utilisée dans la méthode à pas liés, implicite. Elle est exposée au chapitre IV).

B : La phase d'"amorçage"

Le calcul de chaque nouveau point $X(t_{i+1})$ de la phase itérative suppose connus les trois points précédents $X(t_{i-2})$, $X(t_{i-1})$ et $X(t_i)$. Au cours de la recherche des trois premiers points, se pose donc un problème pour le calcul de la dérivée $\frac{dX}{dt}$.

Nous conservons la formule de base de la méthode de Kutta-Rung (95) mais la dérivée $\frac{dX}{dt}(t)$ n'est plus calculée par extrapolation mais par interpolation d'ordre 2 puis 3.

Comme pour la phase d'"amorçage" de la méthode précédente, nous posons les trois hypothèses :

$$. u_5 \gg 3h$$

$$. f(\tau) = f_t (= \text{constante}) \quad \text{si} \quad \theta - 3h \leq \tau \leq \theta$$

$$. f(\tau) = f_a (= \text{constante}) \quad \text{si} \quad \tau_A - 3h \leq \tau \leq \tau_A$$

Dans ces conditions, le système initial :

$$\frac{dX}{dt}(t) = [B] X(t) + \varphi(t) \quad (100)$$

est tel que :

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_3(t) = \varphi_5(t) = 0 \quad (101)$$

$$\varphi_3(t) = u_1 f_a \int_{\tau_A - t}^{\tau_A} x_2(t) dt + \frac{u_3}{1-u_3} f_t \int_{\theta - t}^{\theta} x_2(t) dt \quad (102)$$

$$\varphi_6(t) = f_t \int_{\theta - t}^{\theta} x_2(t) dt \quad (103)$$

L'amorçage s'effectue alors de proche en proche en utilisant des interpolations sur 2 ou 3 points :

1° : t = 0

. X (0) est connu

. calcul de $\frac{dX}{dt}$ (0) d'après (100) avec :

$$\varphi_k = 0 \quad \forall k$$

2° : t = h/2

$$. X (h/2) = X (0) + \frac{h}{2} \frac{dX}{dt} (0)$$

. calcul de $\frac{dX}{dt} \left(\frac{h}{2} \right)$, d'après (100), en utilisant la formule des trapèzes pour le calcul des intégrales de $\varphi(t)$

$$\int_0^{h/2} x_2(t) dt = \frac{h}{4} \cdot x_2 \left(\frac{h}{2} \right)$$

3° : t = h

$$. X (h) = X_0 + h \frac{dX}{dt} (h/2)$$

. calcul de $\frac{dX}{dt} (h)$, d'après (100), les intégrales

$$\int_0^h x_2(t) dt$$

étant calculées par l'intermédiaire d'une interpolation polynomiale de $x_2(t)$ sur le support : $(0, \frac{h}{2}, h)$.

4° : t = 3h/2

$$. X (3 h/2) = X (h) + \frac{h}{2} \frac{dX}{dt} (h)$$

. calcul de $\frac{dX}{dt} (3 h/2)$: les intégrales

$$\int_0^{3h/2} x_2(t) dt$$

sont calculées à partir d'une interpolation polynomiale de $x_2(t)$ sur le support : $(\frac{h}{2}, h, \frac{3h}{2})$

5° : $t = 2h$:

. $X(2h) = X(h) + h \frac{dX}{dt}(h/2)$

. calcul de $\frac{dX}{dt}(2h)$ par interpolation polynomiale de $x_2(t)$ sur le support $(0, h, 2h)$.

V - DISCUSSION SUR LES METHODES UTILISEES

Nous avons vu que, dans chacune de ces méthodes de résolution du système intégral-différentiel, nous avons recours à des approximations de fonctions par interpolation et par extrapolation :

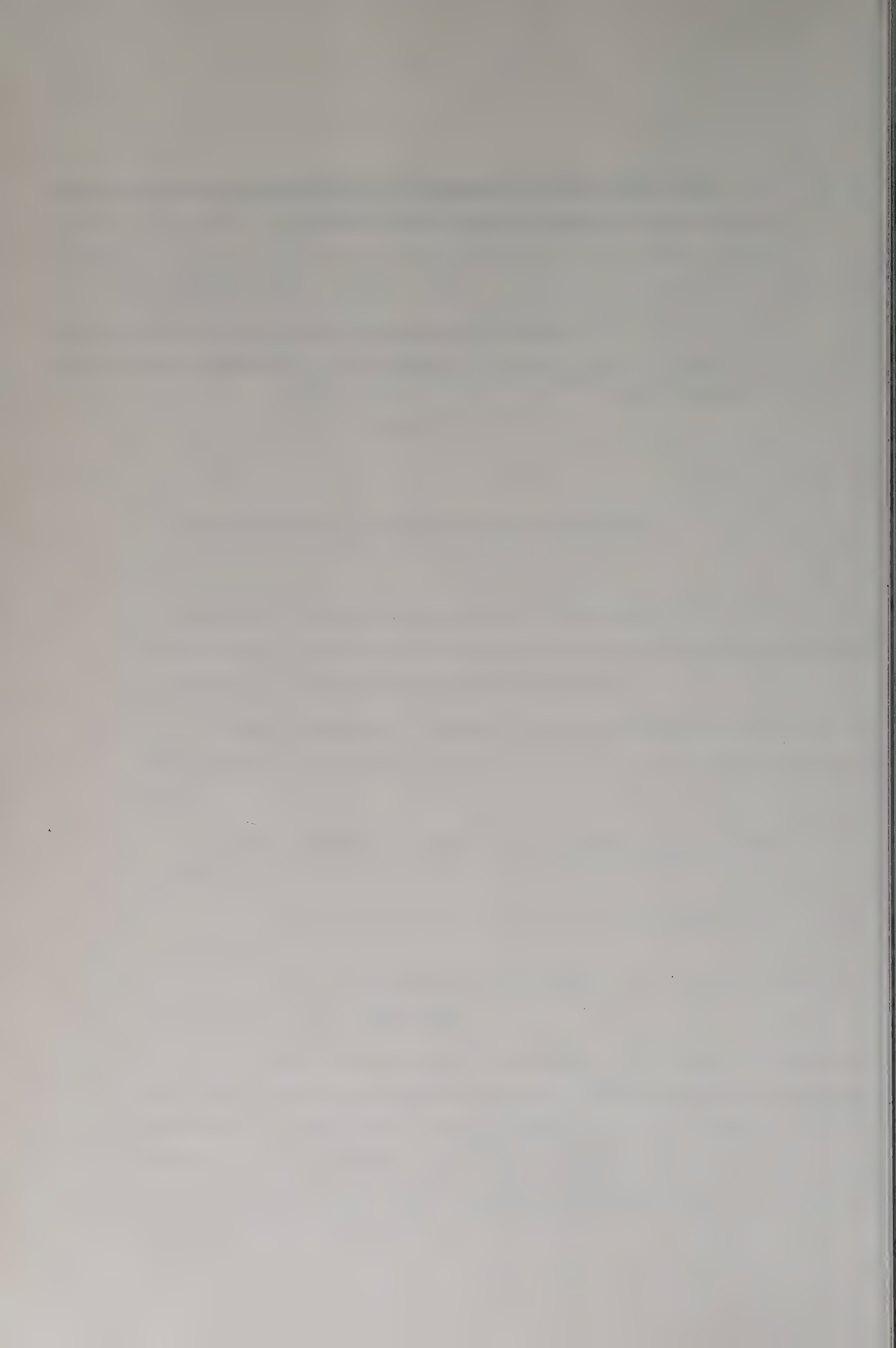
. Dans la méthode à pas liés, implicite, toutes les approches sont faites par des interpolations sur un support de 4 points (polynôme du 3^{ème} degré).

. Dans la méthode "mixte", de type Kutta-Runge, les approches sont faites :

- par extrapolation sur un support de 3 points dans la phase itérative ;
- par interpolation sur un support de 2 ou 3 points dans la phase d'amorçage.

La première méthode paraît supérieure. En effet, une interpolation à degré égal, donne en général de meilleurs résultats qu'une extrapolation. D'autre part, au cours de la phase d'"amorçage" dont l'influence est importante à cause du maximum aigu de la fonction $x_2(t)$, les approximations sont d'un degré moindre dans la seconde méthode ; et ce degré ne peut être augmenté sur le premier pas.

Mais l'efficacité de chacune de ces méthodes est étroitement liée à la valeur du pas d'intégration h . C'est pourquoi, en présentant les résultats au chapitre (V), nous étudierons, dans chacun des cas, l'influence de ce paramètre sur la précision des résultats et sur la durée des calculs. La confrontation des résultats nous permettra de comparer l'efficacité de ces méthodes en vue du choix de celle qui sera utilisée dans notre problème d'identification.



CHAPITRE IV

CALCUL DES INTEGRALES $\int_0^v f(\tau) x_2(t - v + \tau) d\tau$



1 - RAPPEL DE L'ORIGINE DE CES INTEGRALES

Elles interviennent dans le second membre du système intégral-différentiel étudié :

$$\frac{d}{dt} X(t) = [B] X(t) + \varphi(t) \quad (1)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \varphi_3 = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t - \tau_A + \tau) d\tau + \frac{u_3}{1 - u_3} \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t - \theta + \tau) d\tau \\ + u_4 \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t - \theta - u_5 + \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varphi_6 = \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t - \theta + \tau) d\tau - u_4 \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t - \theta - u_5 + \tau) d\tau \quad (3)$$

où $x_2(t)$ est le second élément de la solution $X(t)$ du système (1) et doit satisfaire la contrainte :

$$\begin{aligned} x_2(w) &= 0 \\ \text{si } w &\leq 0 \end{aligned}$$

(4)

A chaque itération de la résolution du système, pour déterminer le nouveau point $X(t_{i+1})$, nous avons besoin :

- dans le cas de la méthode à pas liés, implicite (chap. III : (17) et (21)) de :

$$\int_0^{\tau_A - h} f(\tau) x_2(t_{i+1} - \tau_A + \tau) d\tau \quad (\text{calcul de } Y_{14}) \quad (5)$$



$$\int_0^{\theta-h} f(\tau) x_2(t_{i+1} - \theta + \tau) d\tau \quad (\text{calcul de } Z_{14}) \quad (6)$$

- dans le cas de la méthode "mixte" (Kutta-Runge), de :

$$\int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t_i - \tau_A + \tau) d\tau \quad (7)$$

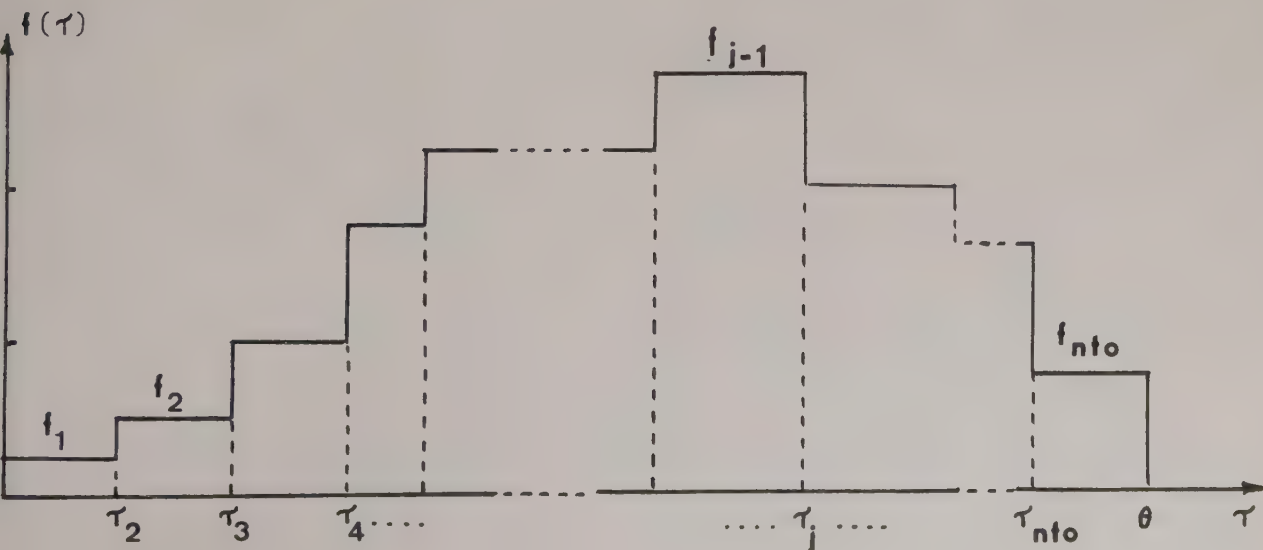
$$\int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t_i - \theta + \tau) d\tau \quad (8)$$

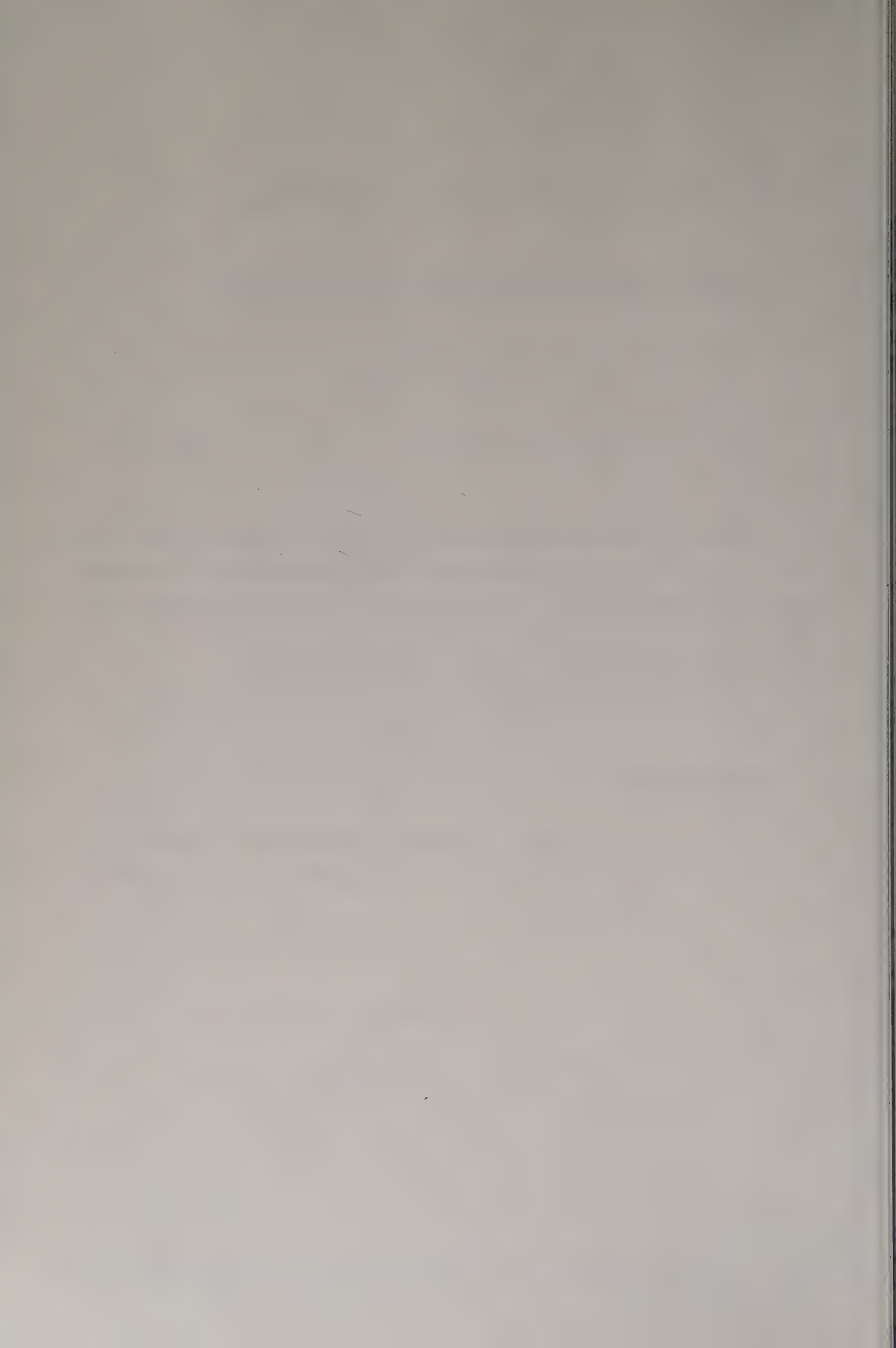
Rappelons que dans ces deux cas, $x_2(t_i)$ est la dernière valeur connue de $x_2(t)$. Le changement de borne supérieure d'une méthode à l'autre ne pose aucun problème et les sous-programmes restent valables dans les deux cas :

seule une précaution est à prendre au moment de l'appel.

II - LES DONNEES :

- a) $f(\tau)$: c'est une fonction constante "par morceaux", définie sur l'intervalle : $0 \leq \tau \leq \theta$, et possédant des discontinuités aux abscisses $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_j \dots \tau_{nto}$





Les abscisses τ_j des discontinuités forment un partage irrégulier, l'intervalle moyen $(\tau_j - \tau_{j-1})$ étant de l'ordre de 0.5 jour.

b) Les bornes des intégrales :

Elles ont pour valeur τ_A et θ ou $(\tau_A - h)$ et $(\theta - h)$ avec :

$$\tau_A < \theta$$

θ : est de l'ordre de 5 jours. Rappelons que l'intervalle d'étude de $X(t)$ est de 20 jours ($0 \leq t \leq 20 \text{ j.}$).

τ_A : sa valeur coïncide avec celle de l'une des discontinuités, τ_j , de la fonction $f(\tau)$.

c) $x_2(t)$: c'est un élément de la solution $X(t)$ du système intégral-différentiel. Cette fonction est donc calculée au fur et à mesure de la résolution, aux points :

$$t_j = j h \quad \text{où } j = 1, 2, 3 \dots$$

Dans les deux méthodes, où nous calculons respectivement :

$$\int_0^{v-h} f(\tau) x_2(t_{i+1} - v + \tau) d\tau \quad \text{et} \quad \int_0^v f(\tau) x_2(t_i - v + \tau) d\tau$$

$$\text{avec } v = \begin{cases} \theta \\ \tau_A \end{cases}$$

nous connaissons :

$$x_2(t_k) \quad \text{où } k = 1, 2, \dots, i$$

III - LA METHODE UTILISEE

Etant donnée l'allure particulière de la fonction $f(\tau)$, décomposons l'intégrale recherchée :

$$S = \int_0^v f(\tau) x_2(T - v + \tau) d\tau = \sum_{k=1}^{v/h} f_k \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} x_2(T - v + \tau) d\tau \quad (9)$$

. f_k étant la valeur constante prise par $f(\tau)$ pour : $\tau_k < \tau < \tau_{k+1}$

. $v = \tau_A$ ou θ selon l'intégrale calculée (ou $\tau_A - h$ et $\theta - h$)

. $T = \begin{cases} t_{i+1} & : \text{pour la méthode à pas liés, implicite} \\ t_i & : \text{pour la méthode de Kutta-Runge} \end{cases}$

(dans les deux cas t_i est le dernier point connu)

. $x_2(t)$ est connu aux points :

$$T - h, T - 2h \dots T - \left(\frac{\theta}{h} + 1\right)h$$

ces valeurs sont en effet conservées en mémoire au cours de la résolution dans le tableau [ZM] .

Le but recherché est de profiter au maximum de résultats intermédiaires d'une itération aux suivantes au cours de la résolution du système intégral-différentiel.

A : Calcul des éléments ΔS_k de l'intégrale S :

$$\Delta S_k = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} x_2(T - v + \tau) d\tau \quad (10)$$

soit après changement de variable $t = T - v + \tau$

$$\Delta S_k = \int_{T-v+\tau_k}^{T-v+\tau_{k+1}} x_2(t) dt \quad (11)$$

Remarquons que les deux bornes ne coïncident pas, en général, avec un point connu. Sur cet intervalle nous connaissons en effet :

$$x_2(T - N_k h), x_2(T - (N_k - 1)h), x_2(T - (N_k - 2)h), \dots, x_2(T - (N_{k+1} + 1)h)$$

où :

$$N_k = \left(\frac{v - \tau_k}{h} \right)_e \quad (\text{partie entière}) \quad (12)$$

Décomposons ΔS_k en trois parties :

$$\Delta S_k = \int_{T-v+\tau_k}^{T-N_k h} x_2(t) dt + \int_{T-N_k h}^{T-(N_{k+1}+1)h} x_2(t) dt + \int_{T-(N_{k+1}+1)h}^{T-v+\tau_{k+1}} x_2(t) dt \quad (13)$$

que nous mettons sous la forme :

$$\Delta S_k = s_k'' + s_k + s_{k+1}' \quad (14)$$

(voir figure page suivante).

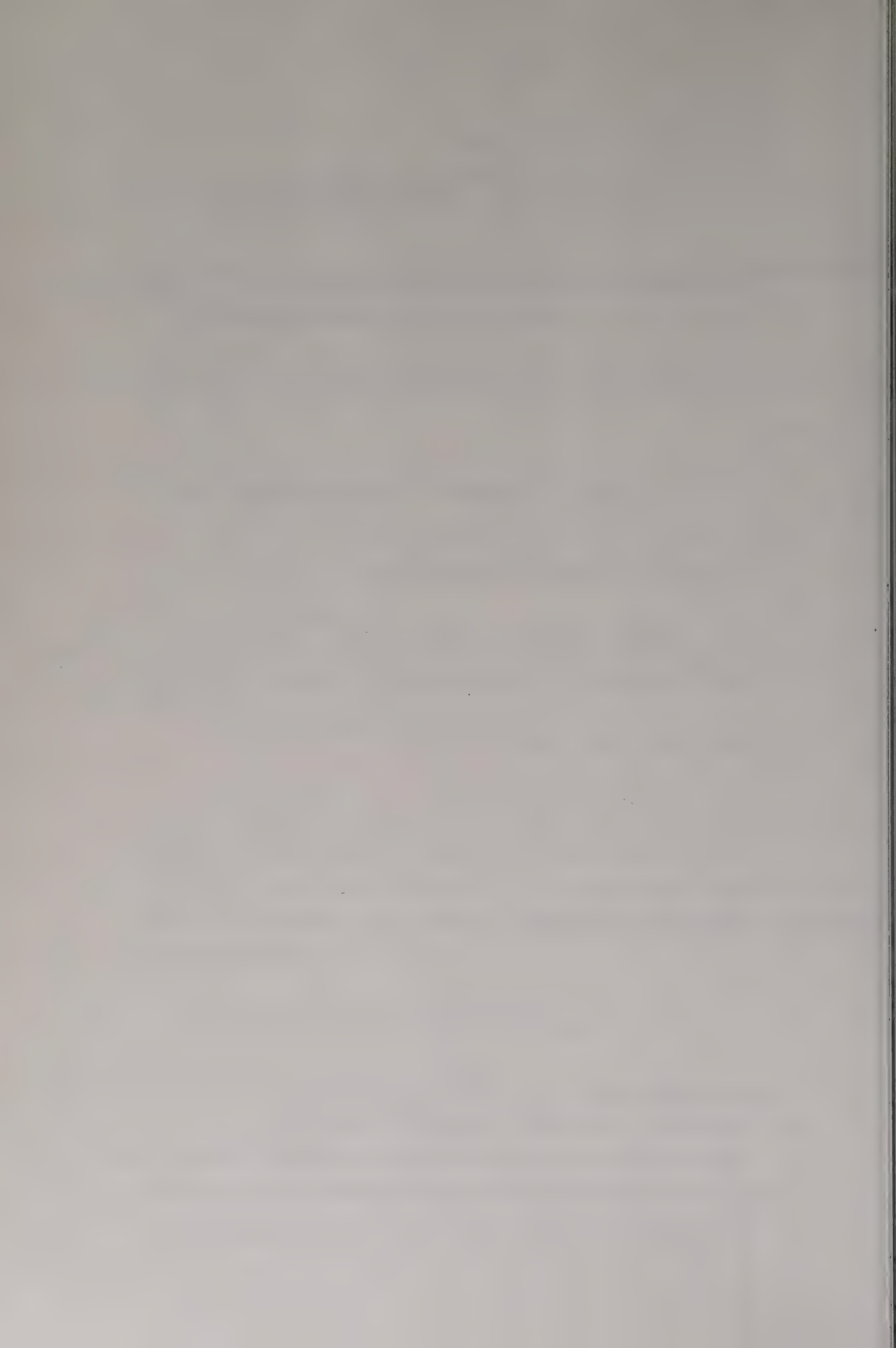
Le terme intermédiaire :

$$s_k = \int_{T-N_k h}^{T-(N_{k+1}+1)h} x_2(t) dt \quad (15)$$

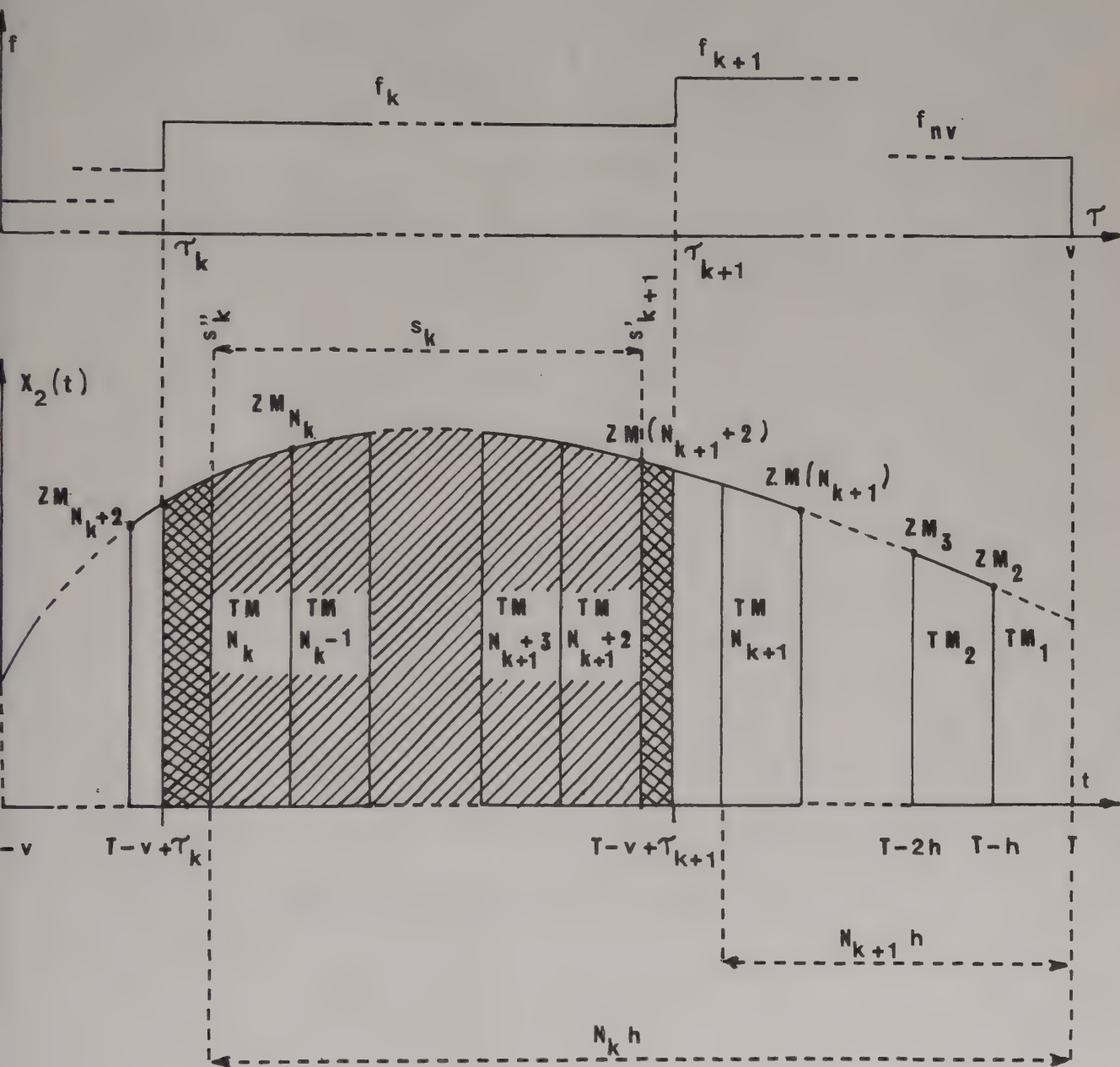
correspond à la partie de l'intervalle d'intégration qui ne contient que des pas entiers de la résolution du système intégral-différentiel.

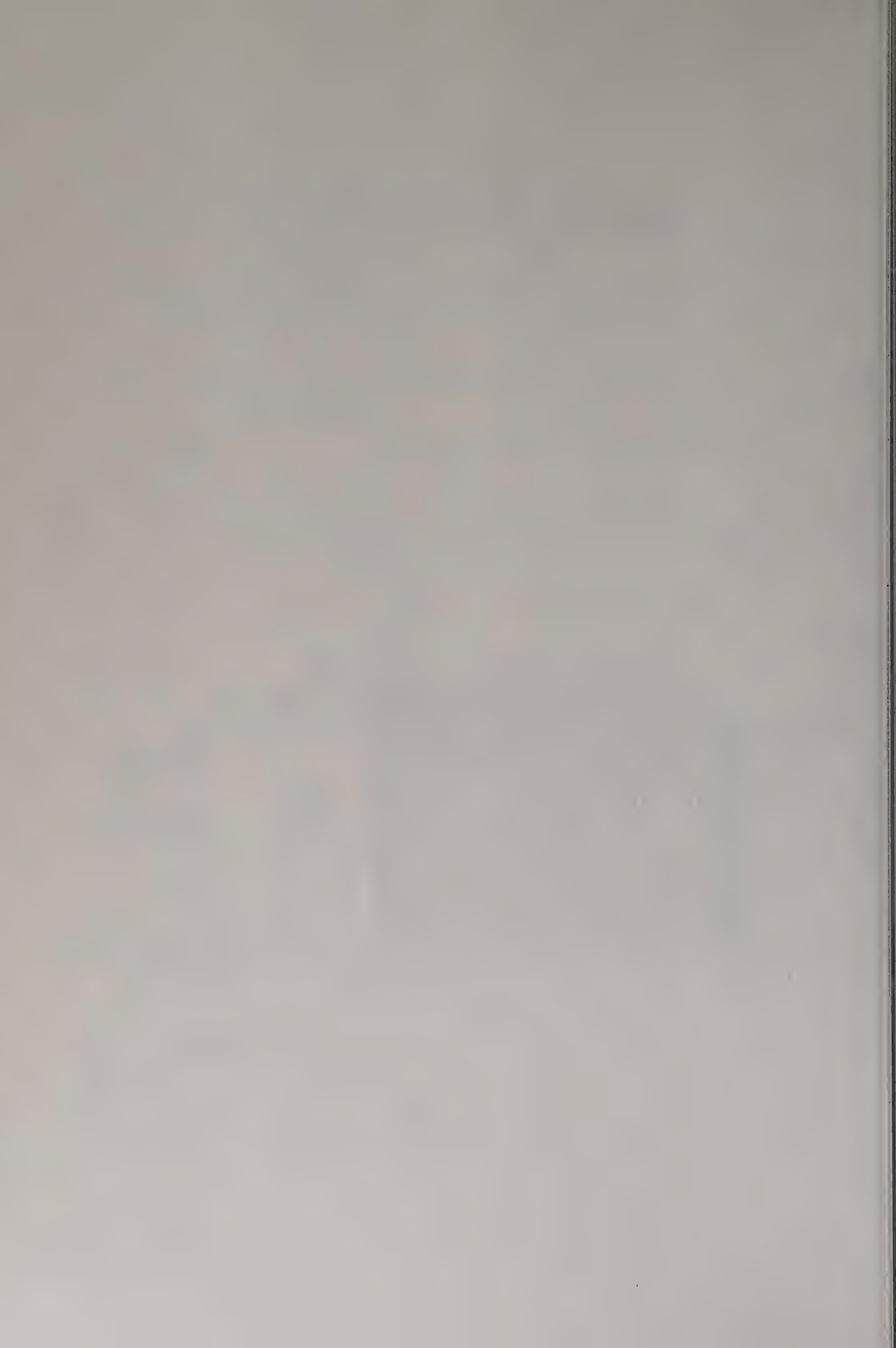
Les deux autres termes correspondent aux deux bordures, les intervalles respectifs d'intégration étant inférieurs au pas h .

Le calcul de ces termes, s_k'' et s_{k+1}' , est exposé page 108.



CALCUL DE $\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f(\tau) x_2(t-v+\tau) d\tau$





A1 : Calcul de s_k (partie centrale de l'intégrale ΔS_k)

$$s_k = \int_{T-N_k h}^{T-(N_k-1)h} x_2(t) dt + \int_{T-(N_k-1)h}^{T-(N_k-2)h} x_2(t) dt + \dots + \int_{T-(N_{k+1}+2)h}^{T-(N_{k+1}+1)h} x_2(t) dt \quad (17)$$

soit :

$$s_k = \sum_{m=N_{k+1}+2}^{N_k} \int_{T-mh}^{T-(m-1)h} x_2(t) dt \quad (18)$$

Calcul d'un élément $\int_{T-mh}^{T-(m-1)h} x_2(t) dt$

Deux cas peuvent se produire selon la contrainte :

$$x_2(w) = 0 \quad \text{si } w \leq 0$$

1° : Si $T-mh < 0$ c'est-à-dire pour $m > \frac{T}{h}$

$$x_2(t) = 0$$

d'où : $\int_{T-mh}^{T-(m-1)h} x_2(t) dt$ si $m > \frac{T}{h}$ (19)

2° : Si $T-mh \geq 0$, c'est à dire pour $m \leq \frac{T}{h}$

$$x_2(t) \neq 0$$

Nous pouvons calculer l'intégrale par l'intermédiaire d'une interpolation sur le support des 4 points :

$$T - (m+2)h \quad T - (m+1)h \quad T - mh \quad \text{et } T - (m-1)h$$

d'où :

$$\int_{T-mh}^{T-(m-1)h} x_2(t) dt = [\beta_1'' \quad \beta_2'' \quad \beta_3'' \quad \beta_4''] \begin{bmatrix} x_2(T-(m+2)h) \\ x_2(T-(m+1)h) \\ x_2(T-mh) \\ x_2(T-(m-1)h) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Les coefficients β_i'' étant identiques à ceux du chapitre précédent (relations 39).

En pratique, toutes ces intégrales sont calculées au fur et à mesure de la résolution et rangées dans le tableau [TM] dont nous avons parlé au cours du chapitre III (71 et 72)

Plaçons-nous à l'itération où nous recherchons $X(T)$:
à la fin de cette itération nous pouvons calculer TM_1

$$TM_1 = \int_{T-h}^T x_2(t) dt = [\beta_1'' \quad \beta_2'' \quad \beta_3'' \quad \beta_4''] \begin{bmatrix} x_2(T-3h) \\ x_2(T-2h) \\ x_2(T-h) \\ x_2(T) \end{bmatrix} \quad (21)$$

les autres éléments du tableau TM s'obtiennent par décalage :

$$(TM_2)_T = (TM_1)_{T-h}$$

$$(TM_3)_T = (TM_2)_{T-h}$$

Et nous construisons ainsi le tableau [TM] tel que :

$$TM(m) = \int_{T-mh}^{T-(m-1)h} x_2(t) dt \quad \text{où } 1 \leq m \leq \frac{T}{h} \quad (22)$$

L'intégrale s_k se réduit donc à une somme d'éléments de $[TM]$:

$$s_k = \sum_{m=N_{k+1}+2}^{N_k} T M(m) \quad \text{si } N_k \leq \frac{T}{h} \quad (23)$$

$$s_k = \sum_{m=N_{k+1}+2}^{T/h} T M(m) \quad \text{si } N_{k+1} < \frac{T}{h} < N_k \quad (24)$$

$$s_k = 0 \quad \text{si } \frac{T}{h} \leq N_{k+1} \quad (25)$$

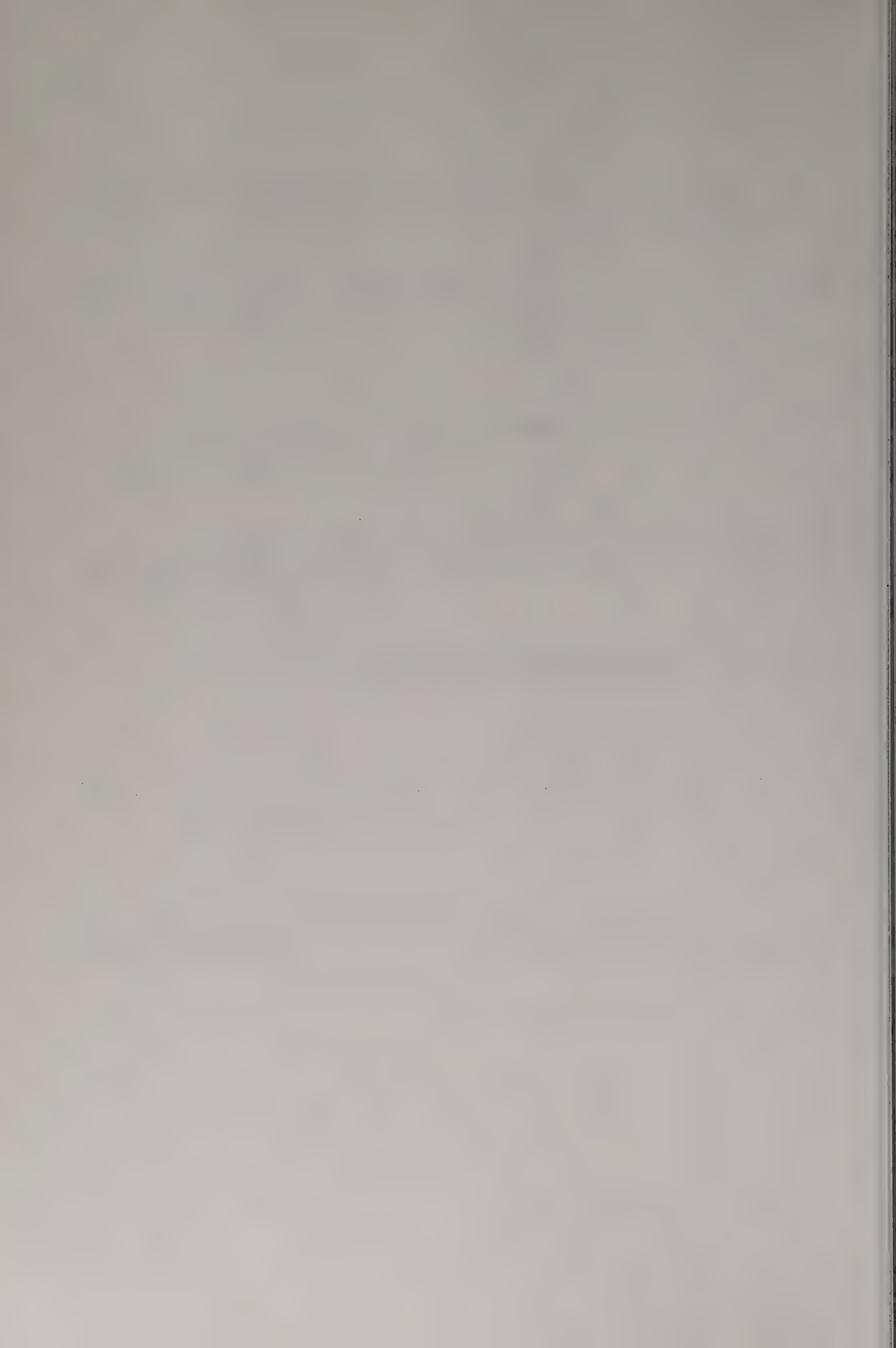
A2 : Calcul des deux intégrales extrêmes

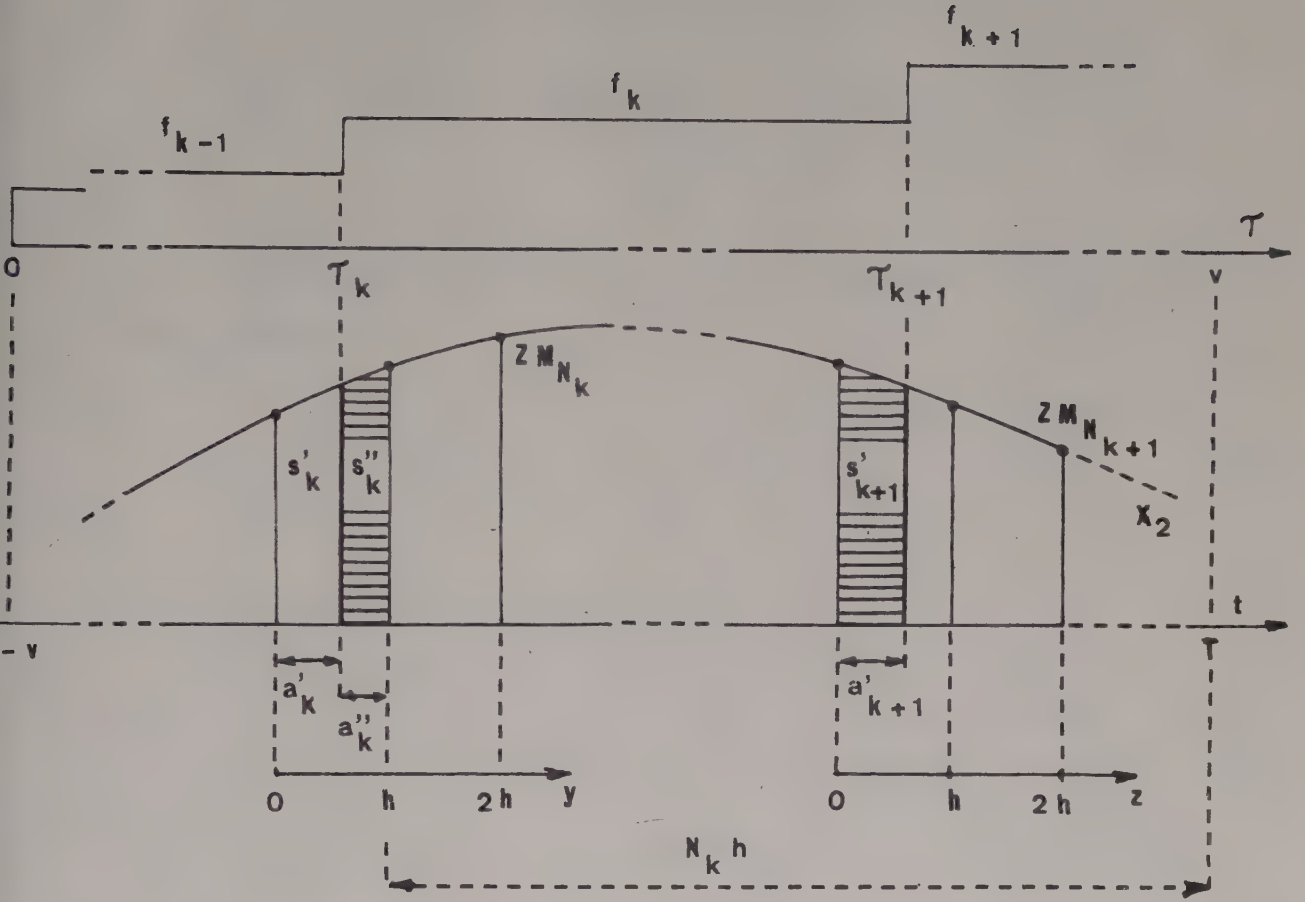
$$s''_k = \int_{T-v+\tau_k}^{T-N_k h} x_2(t) dt \quad \text{et } s'_{k+1} = \int_{T-(N_{k+1}+1)h}^{T-v+\tau_{k+1}} x_2(t) dt \quad (26)$$

Ces deux intégrales correspondent aux portions a''_k et a'_{k+1} , inférieures au pas h , qui bordent l'intervalle $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ (voir la figure page 109).

$$a''_k = v - \tau_k - N_k h$$

$$a'_{k+1} = h - (v - \tau_{k+1} - N_{k+1} h)$$





Interpolons $x_2(t)$ sur les intervalles :

$$[T - (N_k + 1)h, T - (N_k - 1)h] \text{ et } [T - (N_{k+1} + 1)h, T - (N_{k+1} - 1)h]$$

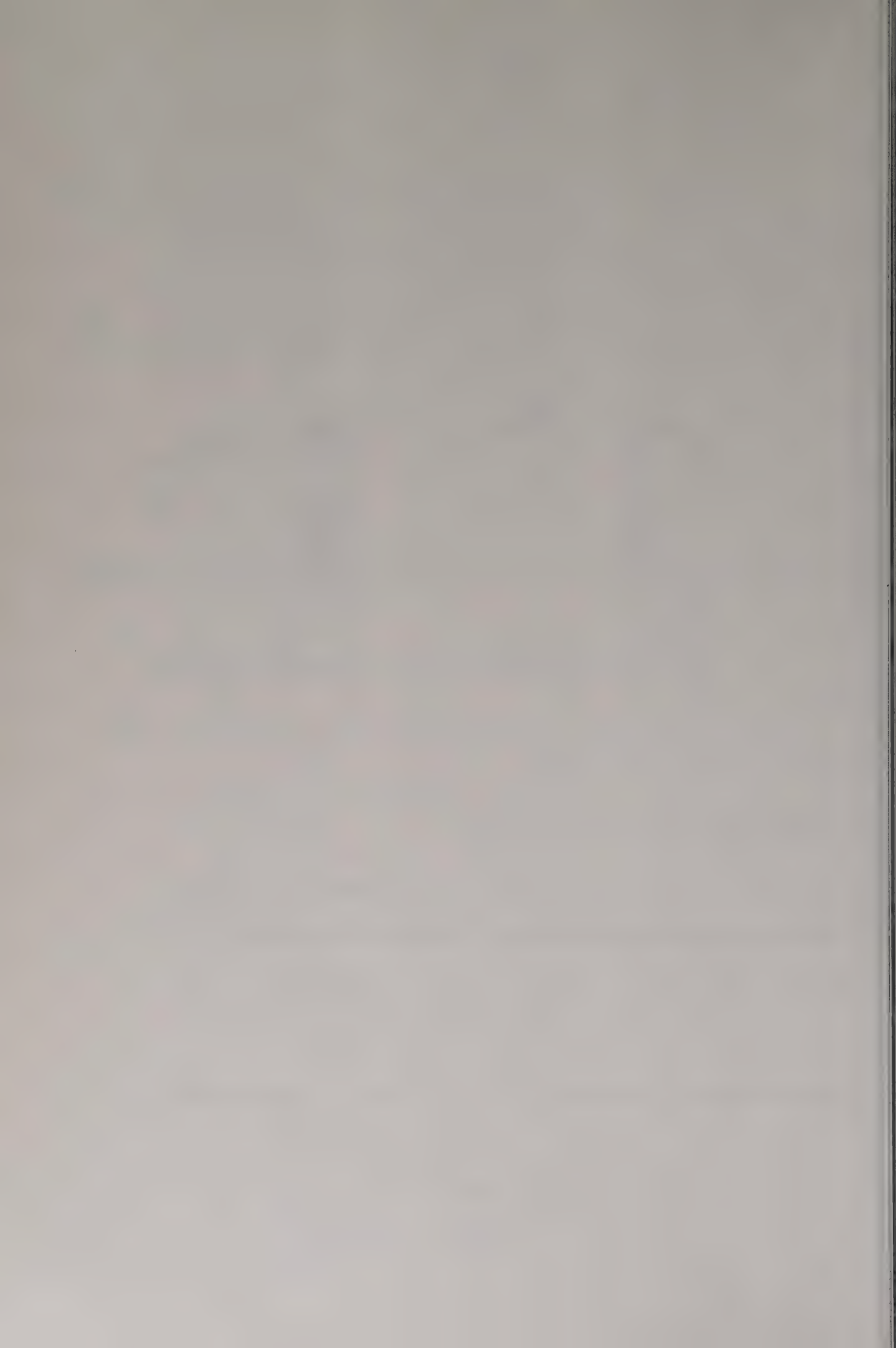
par deux polynômes construits sur les supports réguliers :

$$T - (N_k + 1)h, \quad T - N_k h \quad \text{et} \quad T - (N_k - 1)h$$

$$T - (N_{k+1} + 1)h, \quad T - N_{k+1} h \quad \text{et} \quad T - (N_{k+1} - 1)h$$

Nous obtenons, en désignant par L_2 , la matrice de Lagrange (Réf. 7) :

$$P(y) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{y}{h} & \frac{y^2}{h^2} \end{bmatrix} [L_2] \begin{bmatrix} x_2(T - (N_k + 1)h) \\ x_2(T - N_k h) \\ x_2(T - (N_k - 1)h) \end{bmatrix} \quad (27)$$



$$P(z) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z}{h} & \frac{z^2}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(T - (N_{k+1} + 1)h) \\ x_2(T - N_{k+1}h) \\ x_2(T - (N_{k+1} - 1)h) \end{bmatrix} \quad (28)$$

L'approximation de $x_2(t)$ avec ces deux polynômes conduit aux deux relations :

$$s_k'' = \int_{a_k'}^h P(y) dy \quad \text{et} \quad s_{k+1}' = \int_0^{a_{k+1}'} P(z) dz \quad (29)$$

où, comme le montre la figure (p. 109).

$$\begin{aligned} y &= t - (N_k + 1)h & z &= t - (N_{k+1} + 1)h \\ a_k'' &= (v - \tau_k) - N_k h & a_{k+1}'' &= (v - \tau_{k+1}) - N_{k+1} h \\ a_k' &= h - a_k'' & a_{k+1}' &= h - a_{k+1}'' \end{aligned} \quad (30)$$

Les calculs conduisent aux deux relations :

$$s_k'' = \begin{bmatrix} d_{k,1}'' & d_{k,2}'' & d_{k,3}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(T - (N_k + 1)h) \\ x_2(T - N_k h) \\ x_2(T - (N_k - 1)h) \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$s_{k+1}' = \begin{bmatrix} d_{k+1,1}' & d_{k+1,2}' & d_{k+1,3}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(T - (N_{k+1} + 1)h) \\ x_2(T - N_{k+1}h) \\ x_2(T - (N_{k+1} - 1)h) \end{bmatrix} \quad (32)$$

où les éléments $(d_{k,1}' \dots)$ et $(d_{k,1}'' \dots)$ ne dépendent que de $\tau_k, \dots, \tau_{k+1}$ et v :

ils sont donc inchangés d'une itération (T) à la suivante $(T + h)$:

$$\begin{aligned}
 d''_{k,1} &= w''_1 - \frac{3}{2} w''_2 + \frac{1}{2} w''_3 & w''_1 &= a''_k \\
 d''_{k,2} &= 2 w''_2 - w''_3 & w''_2 &= \frac{h^2 - a'^2_k}{2h} \\
 d''_{k,3} &= \frac{1}{2} (w''_3 - w''_2) & w''_3 &= \frac{h^3 - a'^3_k}{3h^2}
 \end{aligned} \quad \text{où} \quad (33)$$

de même :

$$\begin{aligned}
 d'_{k+1,1} &= w'_1 - \frac{3}{2} w'_2 + \frac{1}{2} w'_3 & w'_1 &= a'_{k+1} \\
 d'_{k+1,2} &= 2 w'_2 - w'_3 & w'_2 &= \frac{a'^2_{k+1}}{2h} \\
 d'_{k+1,3} &= \frac{1}{2} (w'_3 - w'_2) & w'_3 &= \frac{a'^3_{k+1}}{3h^2}
 \end{aligned} \quad \text{où} \quad (34)$$

Les valeurs $x_2(T)$, $x_2(T-h)$... sont conservées dans le tableau ZM (voir chap. III, relation 69) :

$$Z M(j+1) = x(T-jh) \quad (35)$$

Les relations (31) et (32) s'écrivent alors :

$$s''_k = \begin{bmatrix} d''_{k,1} & d''_{k,2} & d''_{k,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z M(N_k + 2) \\ Z M(N_k + 1) \\ Z M(N_k) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$s'_{k+1} = \begin{bmatrix} d'_{k+1,1} & d'_{k+1,2} & d'_{k+1,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z M(N_{k+1} + 2) \\ Z M(N_{k+1} + 1) \\ Z M(N_{k+1}) \end{bmatrix} \quad (37)$$

Remarque 1 :

Les coefficients $d'_{k,j}$ et $d''_{k,j}$ ne dépendent que des distances $(v - \tau)$ et de la valeur du pas h . Aussi les conservons nous en mémoire pendant

toute la résolution du système intégral-différentiel et même pendant toute l'exécution du programme d'ajustement :

$$\begin{aligned} v = \theta \quad & \text{DT1 } (j, k) = d'_{k, j} \quad j = 1, 2 \text{ et } 3 \\ & \text{DT2 } (j, k) = d''_{k, j} \quad k = 1, 2, \dots, \frac{\theta}{h} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} v = \tau_A \quad & \text{DA1 } (j, k) = d'_{k, j} \quad j = 1, 2 \text{ et } 3 \\ & \text{DA2 } (j, k) = d''_{k, j} \quad k = 1, 2, \dots, \frac{\tau_A}{h} \end{aligned} \quad (39)$$

Dans le cas d'un changement de pas en cours de résolution

nous conservons alors 8 tableaux en mémoire :

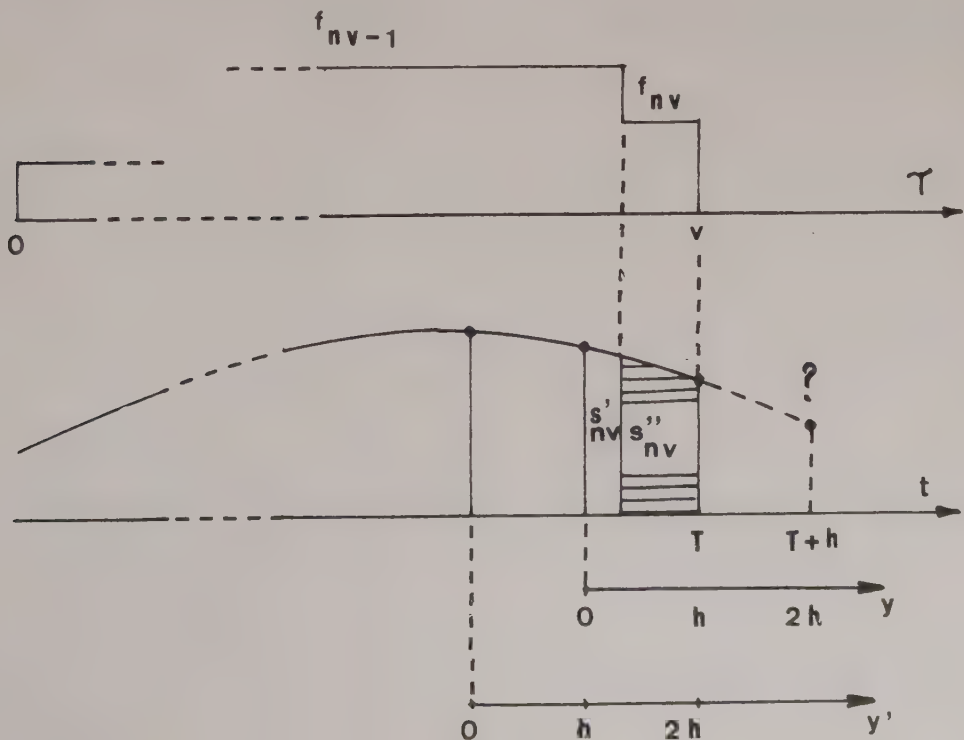
$$\begin{aligned} \text{DT11, DT21, DA11 et DA21} \quad & \text{où } h = h_1 \\ \text{DT12, DT22, DA12 et DA22} \quad & \text{où } h = h_2 \end{aligned}$$

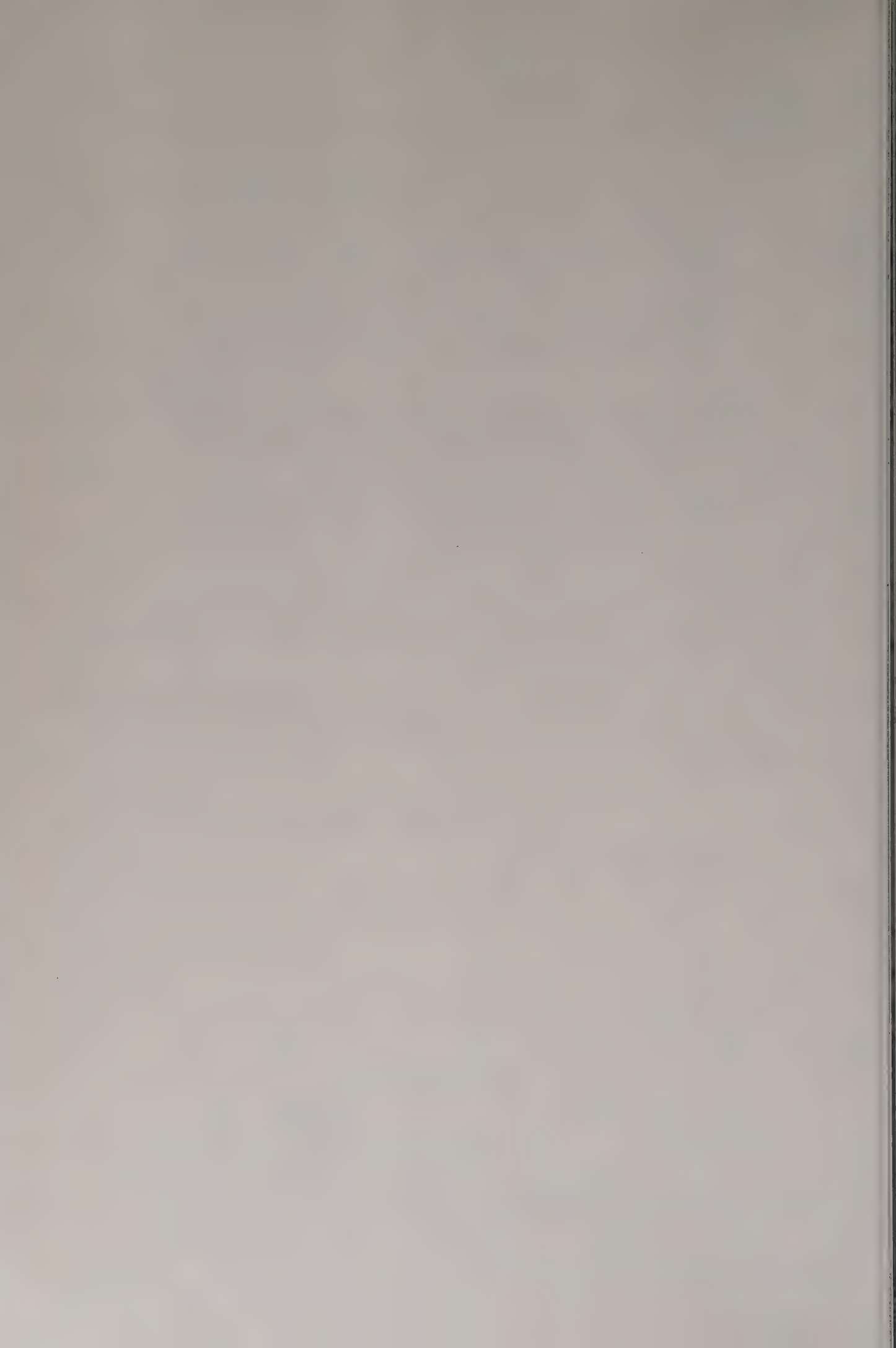
Remarque 2 : Cas particulier : le dernier intervalle $(v - \tau_{nv})$ est inférieur au pas.

Nous avons alors : $N_k = 0$, et le support de l'interpolation effectuée ci-dessus pour le calcul de s'_{nv} et s''_{nv} correspondrait aux trois points :

$$T - h, T \text{ et } T + h$$

Or, $x_2(T + h)$ est inconnu.





Nous prendrons donc comme support d'interpolation, pour le calcul de s'_{nv} et s''_{nv} :

$$T - 2h, \quad T - h \quad \text{et} \quad T.$$

Nous obtenons deux relations analogues aux précédentes :

$$s'_{nv} = \begin{bmatrix} b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(T - 2h) \\ x_2(T - h) \\ x_2(T) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$s''_{nv} = \begin{bmatrix} b''_1 & b''_2 & b''_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(T - 2h) \\ x_2(T - h) \\ x_2(T) \end{bmatrix} \quad (41)$$

Les coefficients b'_j et b''_j sont également conservés en mémoire à l'aide des tableaux

GT1, GT2, GA1 et GA2.

Remarque 3 : Influence de la contrainte sur les intégrales extrêmes s'_k et s''_k :

Rappelons cette contrainte :

$$\begin{cases} x_2(w) = 0 \\ \text{si } w \leq 0 \end{cases}$$

et la forme de ces intégrales :

$$s''_k = \int_{T-v+\tau_k}^{T-N_k h} x_2(t) dt \quad \text{et} \quad s'_{k+1} = \int_{T-(N_{k+1}+1)h}^{T-v+\tau_{k+1}} x_2(t) dt \quad (42)$$

T étant égal à un multiple de valeurs de h, deux cas seulement peuvent se produire au cours de ces deux calculs :

. calcul de s''_k

$$T - N_k h \leq 0$$

$$s''_k = 0$$

$$T - N_k h > 0$$

$$s''_k = [d''_{k,1} \quad d''_{k,2} \quad d''_{k,3}]$$

$$\begin{bmatrix} ZM(N_k + 2) \\ ZM(N_k + 1) \\ ZM(N_k) \end{bmatrix}$$

. calcul de s'_{k+1}

$$T - (N_{k+1} + 1) h < 0$$

$$s'_{k+1} = 0$$

$$T - (N_{k+1} + 1) h \geq 0$$

$$s'_{k+1} = [d'_{k+1,1} \quad d'_{k+1,2} \quad d'_{k+1,3}]$$

$$\begin{bmatrix} ZM(N_{k+1} + 2) \\ ZM(N_{k+1} + 1) \\ ZM(N_{k+1}) \end{bmatrix}$$

A3 : Influence de la contrainte concernant $x_2(t)$ sur l'élément ΔS_k

$$\Delta S_k = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} x_2(T - v + \tau) d\tau \quad (43)$$

Rappelons cette contrainte :

$$x_2(T - v + \tau) = 0 \quad \text{si } (T - v + \tau) \leq 0 \quad (44)$$

Nous avons décomposé l'intervalle d'intégration en trois parties :

$$\Delta S_k = s''_k + s_k + s'_{k+1}$$

Regroupons les différents résultats. Ceux-ci nous conduisent à considérer trois cas :

$$T > v, \quad T = 0 \quad \text{et} \quad T < v$$

1°) $T > v$: Il est inutile de tester le signe de l'expression $(T - v + \tau_k)$ qui reste positive sur tout l'intervalle d'intégration de ΔS_k .

$$\Delta S_k = \begin{bmatrix} d''_{k,1} & d''_{k,2} & d''_{k,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ZM(N_k+2) \\ ZM(N_k+1) \\ ZM(N_k) \end{bmatrix} + \sum_{m=N_{k+1}+2}^{N_k} TM(m) \quad (46)$$

$$+ \begin{bmatrix} d'_{k+1,1} & d'_{k+1,2} & d'_{k+1,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ZM(N_{k+1}+2) \\ ZM(N_{k+1}+1) \\ ZM(N_{k+1}) \end{bmatrix}$$

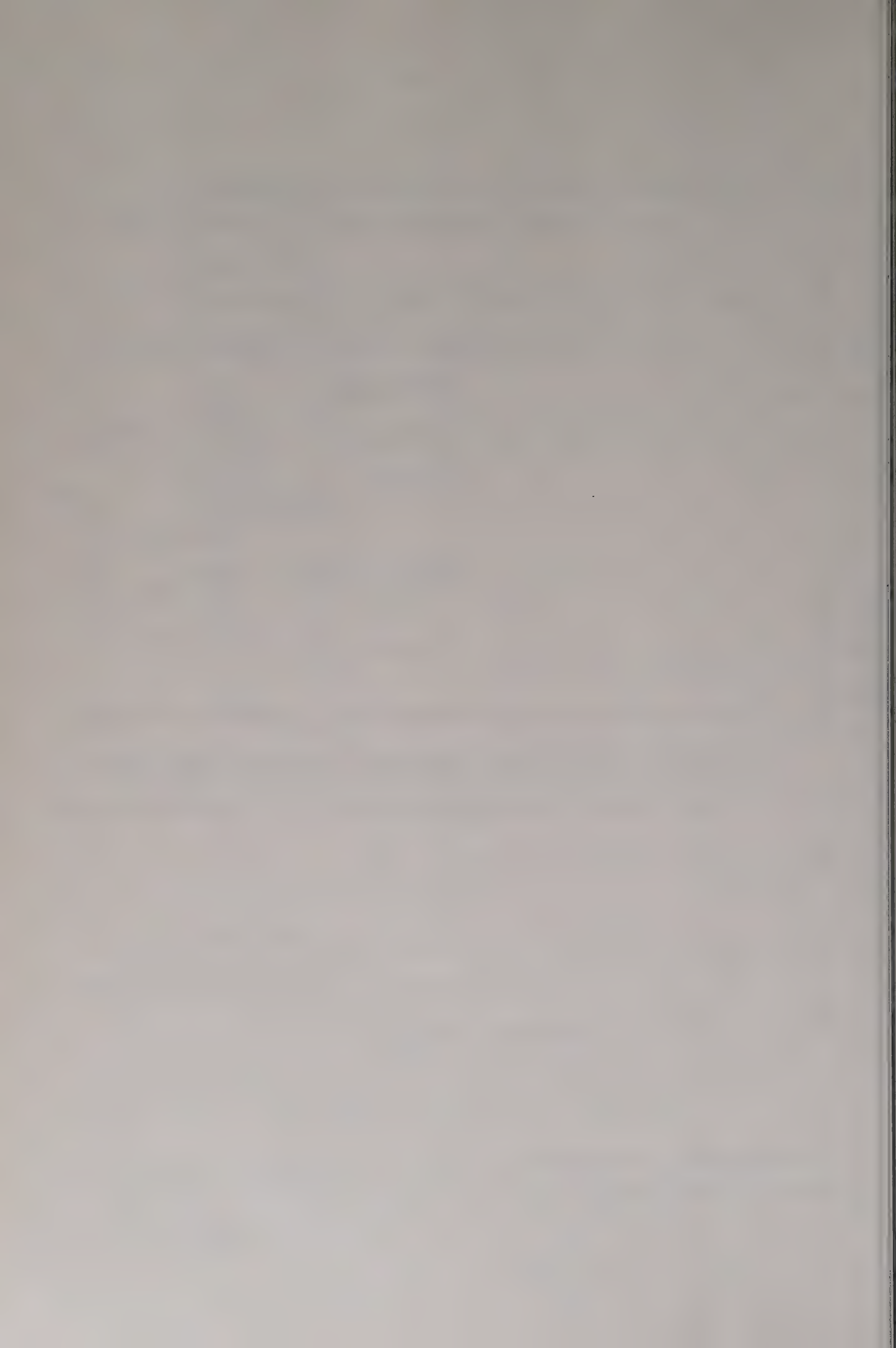
2°) $T = v$: Ce cas est assez peu fréquent car, en général, v n'est pas un multiple entier du pas d'intégration h . La formule (46) reste valable et le test de signe de l'expression $(T - v + \tau_k)$ est également inutile.

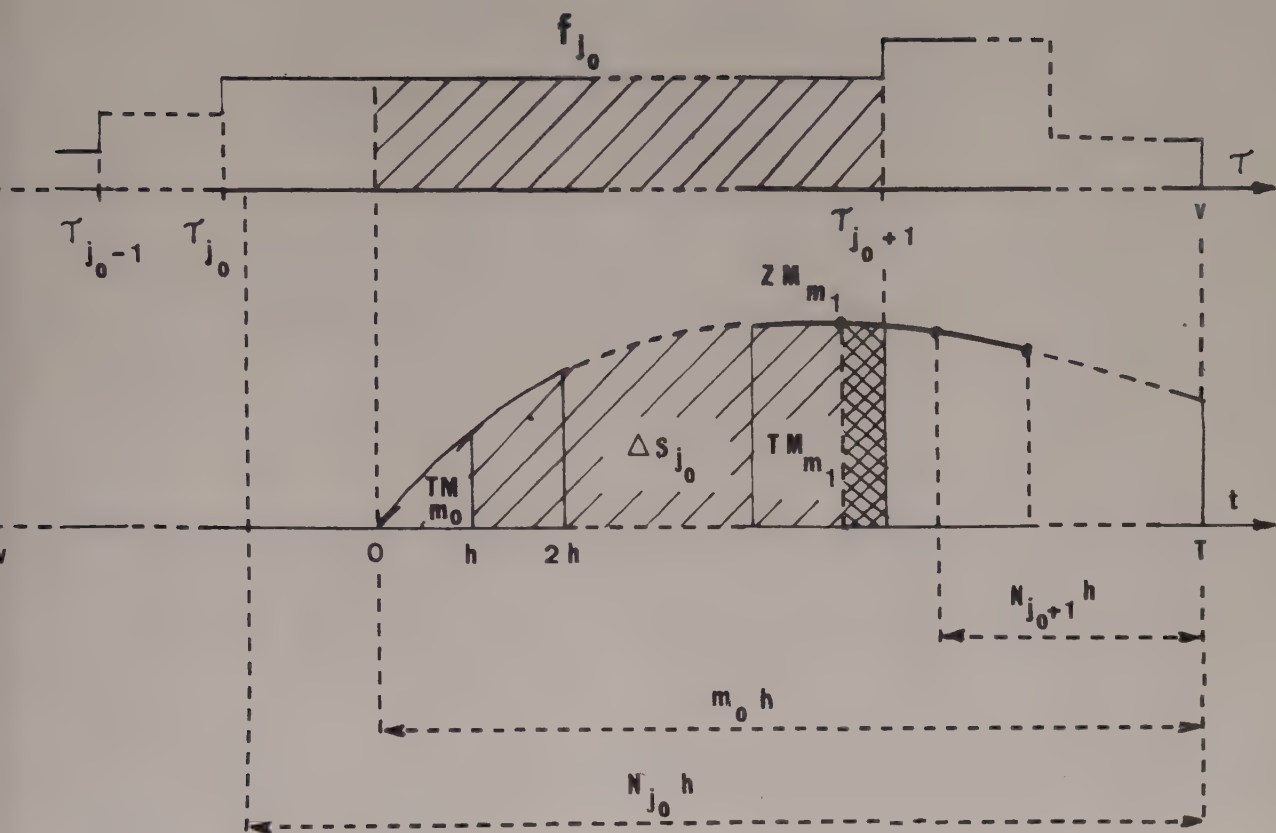
3°) $T < v$: Plusieurs cas peuvent se présenter selon que l'expression $(T - v + \tau_k)$ est positive ou négative. Et le test de signe de cette dernière est obligatoire à chaque pas.

Appelons τ_{j_0} la valeur particulière τ_j correspondant à une discontinuité de $f(\tau)$ telle que :

$$T - v + \tau_{j_0} < 0 \quad (47)$$

$$\text{et} \quad T - v + \tau_{j_0+1} \geq 0$$





Nous avons alors, pour l'ensemble des éléments ΔS_k :

$$a) \quad k < j_0 : \quad \Delta S_k = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} x_2 (T - v + \tau) d\tau = 0 \quad (48)$$

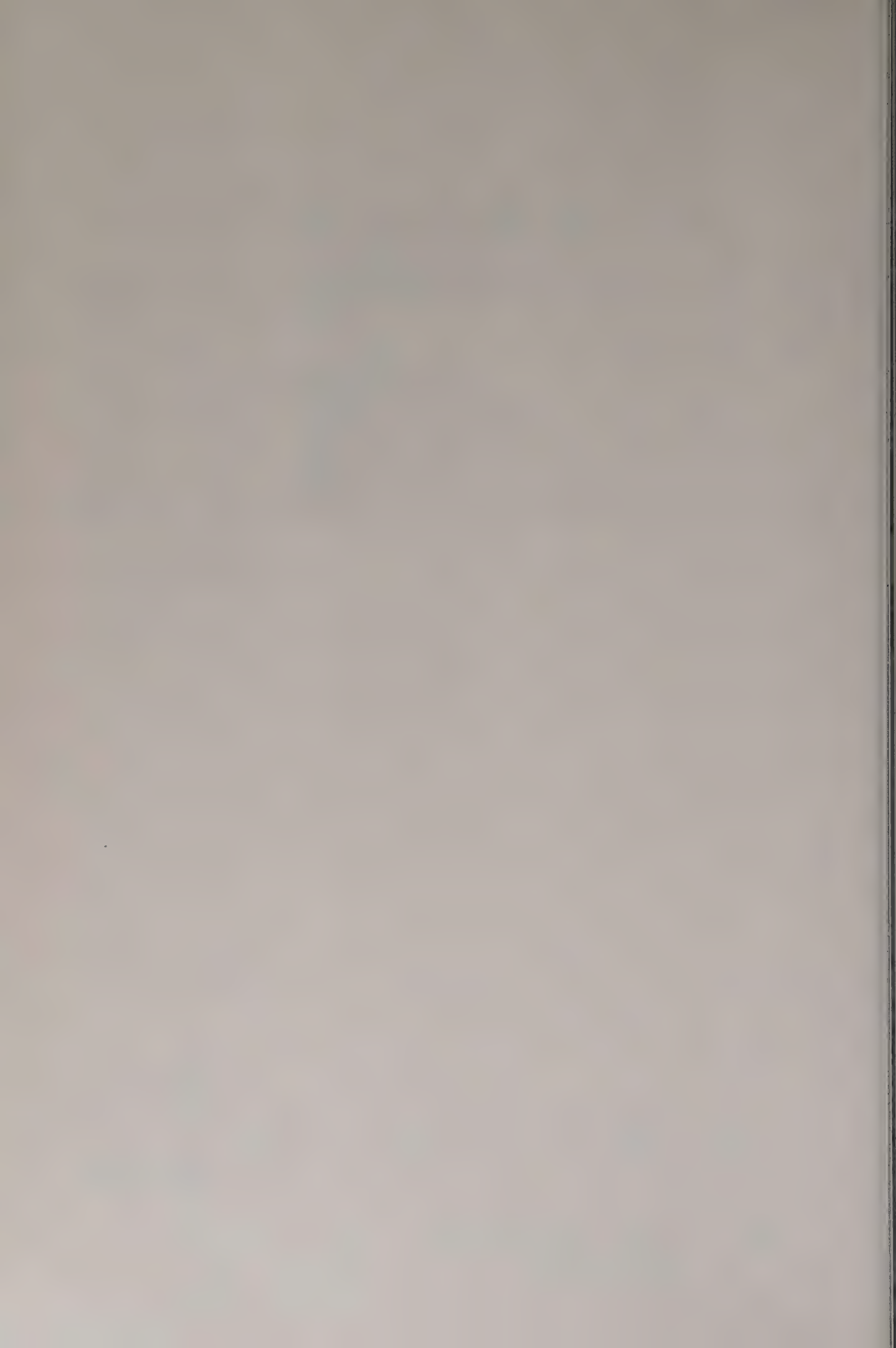
$$b) \quad k = j_0 : \quad \Delta S_{j_0} = \int_{v-T}^{\tau_{j_0+1}} x_2 (T - v + \tau) d\tau \quad (49)$$

soit :

$$\Delta S_{j_0} = \sum_{m=m_1}^{m_0} TM(m) + \begin{bmatrix} d'_{j_0+1,1} & d'_{j_0+1,2} & d'_{j_0+1,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ZM(m_1) \\ ZM(m_1-1) \\ ZM(m_1-2) \end{bmatrix} \quad (50).$$

où : $m_0 = \text{partie entière } (T/h)$

$$m_1 = N_{j_0+1} + 2$$



- c) $k > j_0$: La formule (46) reste valable puisque sur l'intervalle d'intégration (τ_k, τ_{k+1}) de l'élément ΔS_k , nous conservons :

$$T - v + \tau > 0$$

B : Calcul de l'intégrale S (T)

$$S(T) = \int_0^v f(\tau) x_2(T - v + \tau) d\tau \quad (51)$$

Nous avons précédemment décomposé cette intégrale :

$$S(T) = \sum_{k=1}^{(v/h)} f_k \cdot \Delta S_k \quad \text{où} \quad \Delta S_k = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} x_2(T - v + \tau) d\tau$$

Comme le calcul des éléments ΔS_k , la recherche de S (T) conduit à considérer les différents cas :

$T \geq v$: où la valeur de chacun des ΔS_k est donnée par la relation (46) ;

$T > v$: où plusieurs étapes s'imposent :

- la recherche de τ_{j_0} d'après (47)
- le calcul de S (T) :

$$S(T) = \Delta S_{j_0} + \sum_{k=j_0+1}^{(v/h)} f_k \Delta S_k \quad (52)$$

où : ΔS_{j_0} : est donné par (50)

ΔS_k : est donné par (46).

C : Cas d'un changement du pas au cours de la résolution du système intégral-différentiel

Nous avons vu que le maximum très aigu de la fonction intégrée x_2 exigeait une faible valeur du pas h au début de l'intervalle ($0 < T < t_c$), alors que des considérations de compatibilité entre précision et durée des calculs nous permettaient d'augmenter ce pas dans la seconde partie de l'intervalle étudié ($T \geq t_c$).

Les calculs de l'intégrale $S(T)$ dans les deux cas ($T < t_c$) et ($T \geq t_c$) sont analogues et se font suivant la méthode exposée ci-dessus, mais avec des valeurs différentes de h et de toutes les grandeurs conservées en mémoire qui dépendent de ce paramètre.

$$\begin{array}{lll}
 h & : & h_1 \longrightarrow h_2 \\
 x_2(t_i - t_j) & : & [ZM] \longrightarrow [ZM'] \\
 \int_{t_j}^{t_{j+1}} x_2(t) dt & : & [TM] \longrightarrow [TM'] \\
 d'_{k,1} \quad d'_{k,2} \quad d'_{k,3} & : & [DT11] \longrightarrow [DT12] \\
 d''_{k,1} \quad d''_{k,2} \quad d''_{k,3} & : & [DT21] \longrightarrow [DT22]
 \end{array}$$

Les modifications de $[ZM]$ et $[TM]$ ont été traitées au chapitre III (relations 87 et 89).

Le calcul de $[DT11]$, $[DT21]$, $[DT12]$ et $[DT22]$, c'est-à-dire celui des coefficients d'_{kj} et d''_{kj} est effectué d'après les formules (33) et (34) de ce chapitre. Ces quatre tableaux demeurent inchangés pendant toutes les résolutions du système intégral-différentiel nécessitées par l'ajustement de notre problème particulier.

Il en est de même pour les quatre tableaux $[DA11]$, $[DA21]$, $[DA12]$ et $[DA22]$ qui correspondent à $v = \tau_A$ (alors que pour les précédents : $v = \tau_B$).

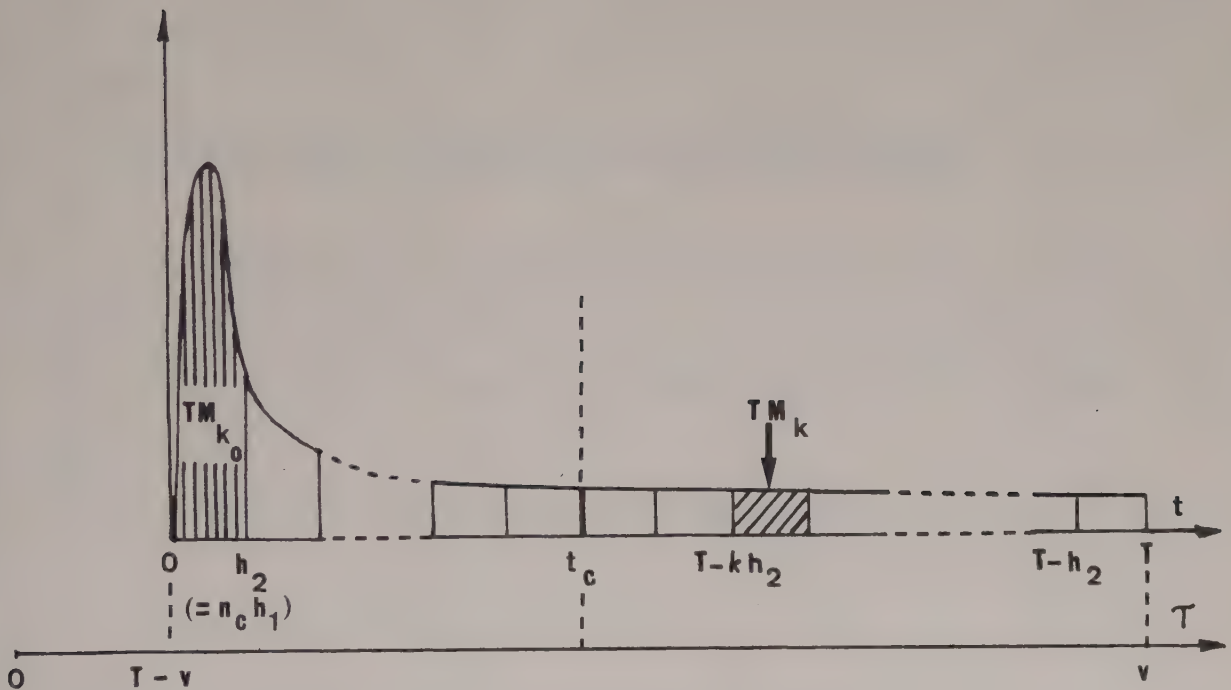
Remarque : Précision des éléments de [TM] - Choix de t_c (instant du changement de valeur du pas h).

Dans le calcul de l'intégrale :

$$S(T) = \int_0^v f(\tau) x_2(T - v + \tau) d\tau$$

interviennent les éléments :

$$TM(k) = \int_{T-kh}^{T-(k-1)h} x_2(t) dt \quad \text{où } k = 1, 2 \dots \frac{v}{h}$$



Si $t_c < T < t_c + v$, le calcul de l'intégrale $S(T)$ fait intervenir toute la première partie de la courbe $x_2(t)$ où se trouve le maximum aigu de cette fonction. Mais, bien que sur cet intervalle $[t_c, t_c + v]$, le pas h ait déjà pris la valeur supérieure : $h_2, (= n_c h_1)$, les éléments TM_k , $TM_{k_0-1} \dots$ de la première partie ($t < t_c$) ont été calculés à partir^o de



la faible valeur h_1 du pas d'intégration. En effet, ils ont été déduits, au moment t_c du changement du pas, par cumul d'éléments correspondant à un pas h_1 (chapitre III : relation 89).

Cette précision des premiers éléments TM_k nous permet d'effectuer le changement de la valeur du pas à un instant où ceux-ci interviennent encore dans le calcul de $S(T)$. En pratique nous avons pris :

$$t_c = 2 \text{ jours}$$

ce qui correspond au dixième de l'intervalle d'étude de notre problème.

Ce choix n'a d'ailleurs pas été arbitraire car il tient compte de l'étude de la précision des résultats obtenus pour l'intégrale $S(T)$ en fonction du pas de calcul et du point T , étude que nous présentons ci-après.

IV - LES RESULTATS : VERIFICATION ET PRECISION

Les résultats sont vérifiés sur l'un des cas particuliers du phénomène physiologique où les équations (1), (2) et (4) du système intégral-différentiel sont indépendantes des trois autres. Ces cas particuliers sont présentés au chapitre V.

La fonction $x_2(t)$ est alors de la forme :

$$x_2(t) = \sum_{i=1}^3 a_i e^{b_i t} \quad (53)$$

et nous pouvons calculer de façon stricte la valeur de :

$$S(T) = \int_0^v f(\tau) x_2(T - v + \tau) d\tau$$

puisque $f(\tau)$ est une fonction constante "par morceaux".

Etudions l'influence de T et celle du pas d'intégration h dans chacun
des cas :

$$\begin{aligned} v &= 0 && (\text{durée du cycle médullaire}) \\ v &= \tau_A && (\text{"age" des cellules qui meurent}). \end{aligned}$$

Les données correspondent à un cas pathologique de mort intra-mé-
dullaire :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.200 && (\text{pourcentage de cellules qui meurent}) \\ \tau_A &= 3.333 && (\text{"age" des cellules médullaires qui meurent}). \end{aligned}$$

La fonction $f(\tau)$ utilisée ainsi que les coefficients a_i et b_i de la relat
(53) sont reportées en Annexe (p. 202).

Etude de l'influence du pas d'intégration en fonction du point T

Utilisant successivement comme valeur du pas :

$$\begin{aligned} h &= 0.01 && (\text{jour}) \\ h &= 0.05 \\ h &= 0.10 \\ h &= 0.20 \end{aligned}$$

nous appliquons la méthode décrite pour calculer chacune des intégrales o
 $v = 0$ et τ_A en initialisant les éléments TM (k) de deux manières différentes

. TM (k) est égal à la valeur exacte :

$$TM(k) = \int_{T - kh}^{T - (k-1)h} \left(\sum_{i=1}^3 a_i e^{b_i t} \right) dt$$

. TM (k) a une valeur approchée déduite, comme dans notre
programme général, par une interpolation polynô-
miale sur le support :

$$T - (k+2)h \quad T - (k+1)h \quad T - kh \quad T - (k-1)h$$

Les tableaux des pages suivantes rassemblent les résultats des deux intégrales

$$\int_0^v f(\tau) x_2(T - v + \tau) d\tau \quad \text{où } x_2(w) = 0 \quad \text{si } w \leq 0$$

correspondant à : $v = 0$

$$v = \tau_A$$

pour les différentes valeurs de T :

$$T = 2 \quad (\text{jours})$$

$$T = 4$$

$$T = 5.$$

Nous constatons que les résultats sont d'autant plus sensibles à l'influence du pas h que la valeur de T est plus faible, ce qui est en accord avec nos prévisions (difficultés dues au maximum très aigu de la fonction $x_2(t)$).

- Pour les faibles valeurs de T ($T < 2$ jours) :

$h = 0.05$: est déjà une valeur trop grande du pas puisqu'elle correspond seulement à 3 ou 4 chiffres significatifs exacts de $S(2)$.

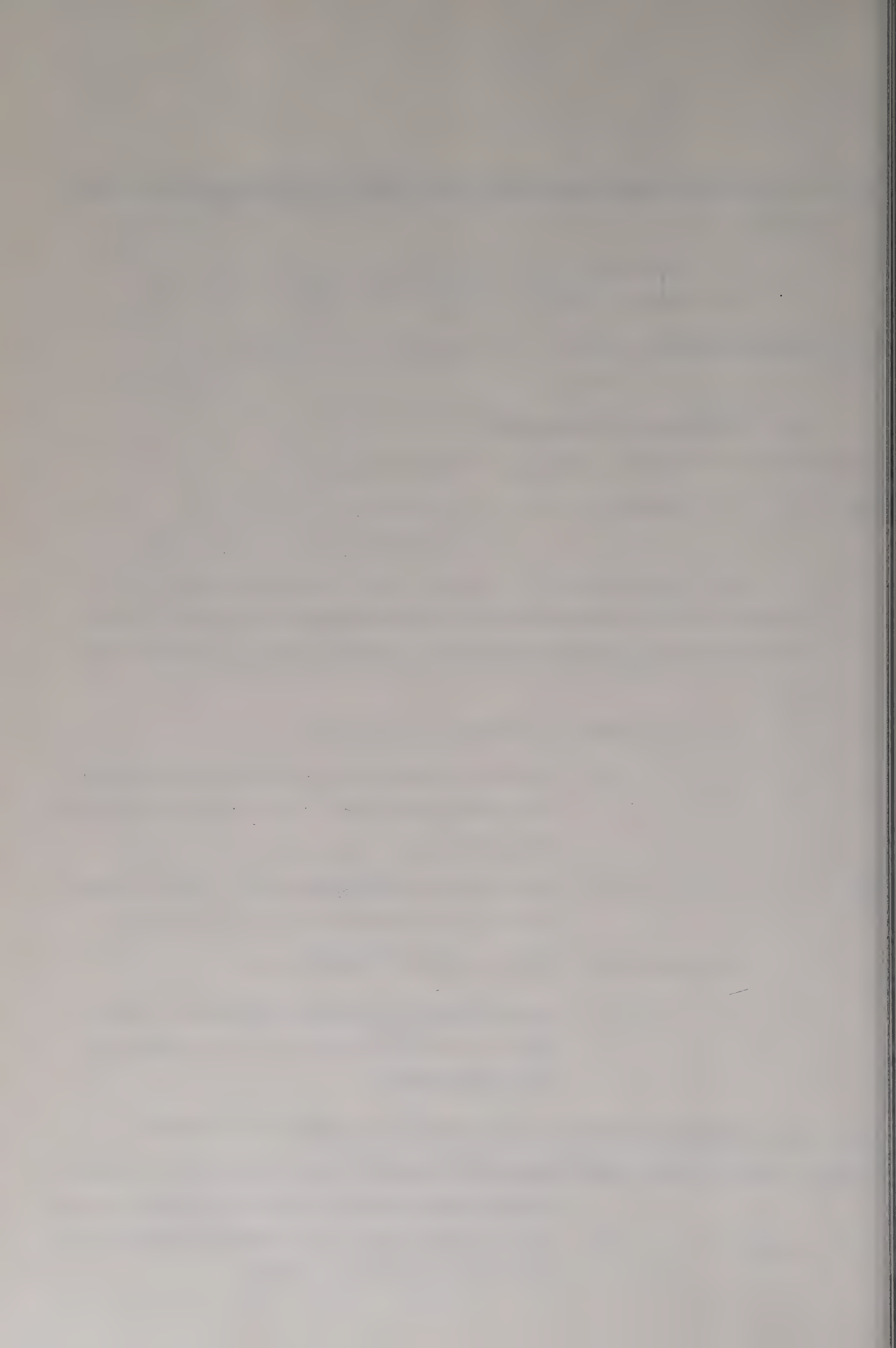
$h = 0.01$: donnant des résultats comportant 6 chiffres significatifs exacts demeure une excellente valeur.

- Pour les valeurs supérieures de T ($T \approx 10$ jours)

$h = 0.10$: correspondant à 6 chiffres significatifs exacts pour $T = 10$ dans les deux cas, nous paraît une valeur acceptable.

- Pour les valeurs moyennes de T (de l'ordre de 2 à 4 jours)

$h = 0.05$: semble la valeur de limite supérieure acceptable. Remarquons cependant, que nous gagnons au minimum 1 chiffre significatif exact en affectant la valeur exacte aux éléments TM_k .



$$\text{Calcul de } S(T) = \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t - \theta + \tau) d\tau$$

$\theta = 5.08$ jours

	TM _k = valeur approchée		TM _k = valeur stricte	
	<u>T = 2</u>		<u>T = 2</u>	
V. e [*]	0.2900	4699	0.2900	4699
h = 0.01	0.2900	4723	0.2900	4699
h = 0.05	0.2900	6351	0.2900	4699
h = 0.10	0.2889	2999	0.2897	6738
h = 0.20	0.2717	9470	0.2885	4658
	<u>T = 4</u>		<u>T = 4</u>	
V. e [*]	0.1430	7963	0.1430	7963
h = 0.01	0.1430	7972	0.1430	7963
h = 0.05	0.1430	8676	0.1430	8090
h = 0.10	0.1428	3800	0.1430	9807
h = 0.20	0.1387	0307	0.1432	9733
	<u>T = 10</u>		<u>T = 10</u>	
V. e [*]	0.4865	9302.10 ⁻²	0.4865	9302.10 ⁻²
h = 0.01	0.4865	9302.10 ⁻²	0.4865	9302.10 ⁻²
h = 0.05	0.4865	9302.10 ⁻²	0.4865	9302.10 ⁻²
h = 0.10	0.4865	9312.10 ⁻²	0.4865	9313.10 ⁻²
h = 0.20	0.4865	9466.10 ⁻²	0.4865	9478.10 ⁻²

* V. e. : valeur exacte.

Calcul de $S(T) = \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t - \tau_A + \tau) d\tau$

$\tau_A = 3.333 \text{ jours}$

	TM _k = valeur approchée		TM _k = valeur stricte	
	<u>T = 2</u>		<u>T = 2</u>	
V. e. *	0.3689	1058.10 ⁻¹	0.3689	1058.10 ⁻¹
h = 0.01	0.3689	1082.10 ⁻¹	0.3689	1058.10 ⁻¹
h = 0.05	0.3689	2969.10 ⁻¹	0.3689	1555.10 ⁻¹
h = 0.10	0.3683	0228.10 ⁻¹	0.3689	7312.10 ⁻¹
h = 0.20	0.3582	8096.10 ⁻¹	0.3702	4005.10 ⁻¹
	<u>T = 4</u>		<u>T = 4</u>	
V. e. *	0.4495	4435.10 ⁻²	0.4495	4435.10 ⁻²
h = 0.01	0.4495	4435.10 ⁻²	0.4495	4435.10 ⁻²
h = 0.05	0.4495	4625.10 ⁻²	0.4495	4772.10 ⁻²
h = 0.10	0.4495	4838.10 ⁻²	0.4495	7062.10 ⁻²
h = 0.20	0.4499	7515.10 ⁻²	0.4502	0940.10 ⁻²
	<u>T = 10</u>		<u>T = 10</u>	
V. e. *	0.4654	9389.10 ⁻³	0.4654	9389.10 ⁻³
h = 0.01	0.4654	9389.10 ⁻³	0.4654	9389.10 ⁻³
h = 0.05	0.4654	9389.10 ⁻³	0.4654	9389.10 ⁻³
h = 0.10	0.4654	9397.10 ⁻³	0.4654	9398.10 ⁻³
h = 0.20	0.4654	9547.10 ⁻³	0.4654	9556.10 ⁻³

* V. e. : valeur exacte.

V - CONCLUSION

Une excellente précision de $S(T)$ est obtenue avec des valeurs très différentes du pas d'intégration selon que l'on considère un point T sur le début ou sur la fin de l'intervalle d'étude.

Ce résultat nous conduit à modifier la valeur de ce pas h en cours de résolution du système ; il nous paraît raisonnable de prendre :

$$0.01 \leq h \leq 0.02 \quad \text{si } T < 2 \text{ jours}$$

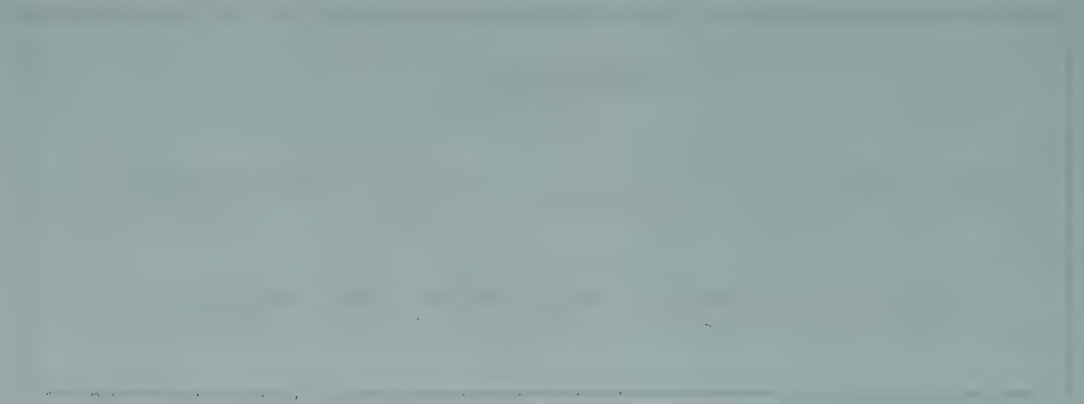
$$0.05 \leq h \leq 0.10 \quad \text{si } T \geq 2 \text{ jours}$$

Ces valeurs sont d'ailleurs également testées au cours de la vérification des résultats globaux de la résolution du système intégral-différentiel (chapitre V).

CHAPITRE V

RESOLUTION DU SYSTEME INTEGRO-DIFFERENTIEL :

VERIFICATION ET PRECISION DES RESULTATS



Au chapitre précédent, nous avons présenté différentes méthodes de résolution du système intégral-différentiel étudié.

La complexité de l'analyse due à la nature même de ce système rend nécessaire la recherche de techniques de vérification des résultats afin de détecter toute erreur d'analyse ou de programmation. Or, il n'existe pas de solution explicite dans le cas général, c'est pourquoi nous avons considéré une série de cas particuliers pour lesquels le système possède une solution stricte. L'ensemble de ces cas particuliers recouvre les principales difficultés du problème et la concordance entre les résultats obtenus en utilisant les méthodes numériques exposées et les valeurs de cette solution stricte paraît un bon gage de sécurité.

D'autre part, nous pourrions étudier ainsi l'influence des différents paramètres introduits et en particulier celle du pas de calcul sur la précision des résultats et la durée des calculs.

I - RECHERCHE DE LA SOLUTION EXPLICITE DU SYSTEME INTEGRO-DIFFERENTIEL DANS CERTAINS CAS PARTICULIERS

Rappelons que le système intégral-différentiel est de la forme :

$$\frac{d}{dt} X = [B] X + \varphi \quad (1)$$

où : $[B]$ est une matrice à éléments constants

φ est un tableau dont quatre éléments sont nuls :

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_4(t) = \varphi_5(t) = 0 \quad \forall t$$

Les deux autres éléments sont des fonctions d'intégrales :

$$\varphi_3(t) = u_1 \int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t-\tau_A+\tau) d\tau + \frac{u_3}{1-u_3} \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t-\theta+\tau) d\tau + u_4 \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t-\theta-u_5+\tau) d\tau \quad (2)$$

$$\varphi_6(t) = \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t-\theta+\tau) d\tau - u_4 \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t-\theta-u_5+\tau) d\tau$$

où :

$$\begin{cases} x_2(w) = 0 & \text{si } w \leq 0 \\ x_2(w) = \text{second élément de la solution X} & \text{si } w > 0 \end{cases} \quad (3)$$

$x_2(t)$ ne possède pas de forme explicite dans le cas général mais nous avons retenu deux cas particuliers où nous pouvons expliciter cette fonction

- 1° $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ (cas de l'individu normal)
- 2° $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_4(t)$ sont des fonctions indépendantes de $x_3(t)$ (cas pathologiques où le fer des cellules mortes n'est pas réutilisé).

A : 1er cas particulier : $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$

Les relations (2) deviennent :

$$\begin{aligned} \varphi_3(t) &= 0 \\ \varphi_6(t) &= \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t-\theta+\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4)$$

Les équations (1), (2) et (4) du système intégral-différentiel forme alors un système homogène indépendant des autres équations du système initial (1), et la fonction $x_2(t)$ est de la forme :

$$x_2(t) = \sum_{i=1}^3 a_i e^{\lambda_i t} \quad (\text{lorsque } t > 0) \quad (5)$$

$x_1(t)$ et $x_4(t)$ sont des combinaisons linéaires de 2 exponentielles.
 $x_3(t)$ et $x_5(t)$ restent constants :

$$x_3(t) = x_5(t) = 0 \quad \forall t \quad (6)$$

D'autre part, la dernière équation se réduisant à

$$\frac{dx_6}{dt} = \varphi_6(t)$$

$x_6(t)$ peut être calculé de façon stricte, puisque $f(\tau)$ est une fonction "escalier", selon la formule :

$$x_6(t) = \int_0^t \int_0^\theta f(\tau) x_2(t - \theta + \tau) d\tau dt \quad (7)$$

Ce cas particulier correspond au point de vue biologique, à celui de l'individu normal : nous avons en effet négligé toute destruction de cellules et de globules.

Il nous permet de vérifier et de comparer les méthodes de résolution du système intégral-différentiel. Il a été également utilisé lors de la vérification du calcul des intégrales du second membre $\varphi_6(t)$ (chapitre IV). Mais il ne peut mettre en évidence une erreur commise sur $\varphi_3(t)$ qui dépend essentiellement de u_1, u_2, u_3 et u_4 et de certaines intégrales non contenues dans $\varphi_6(t)$ (rel. 2). Aussi avons-nous recherché un autre cas particulier dépendant de ces paramètres et de ces intégrales, et qui possède lui aussi une solution stricte explicite.

B : 2ème cas particulier où $x_1(t), x_2(t), x_4(t)$ et $x_5(t)$ sont indépendants

 de $x_3(t)$:

(cas de "non réutilisation" du fer des cellules mortes).

Si les coefficients k_5 et k_6 du modèle de simulation (p. 10) sont nuls, tous les éléments de la 3ème colonne de [B] sont nuls également et les fonctions $x_i(t)$ citées ci-dessus sont indépendantes de $x_3(t)$. Les

équations (1), (2) et (4) du système sont alors indépendantes et homogènes et leurs solutions sont des combinaisons de 2 ou 3 exponentielles ; nous avons en particulier, comme dans le cas précédent :

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \sum_{i=1}^3 a_i e^{b_i t} & x_j(t) &= \sum_{i=1}^2 a_i e^{b_i t} \quad (j = 1, 2) \\ x_5(t) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Les deux autres équations sont indépendantes :

$$\frac{dx_3(t)}{dt} - u_2 \cdot x_6(t) = \varphi_3(t) \quad (9)$$

$$\frac{dx_6(t)}{dt} + u_2 \cdot x_6(t) = \varphi_6(t) \quad (10)$$

$\varphi_3(t)$ et $\varphi_6(t)$ ayant les formes complètes (2) où :

$$\begin{cases} x_2(w) = \sum_{i=1}^3 a_i e^{b_i w} & \text{si } w > 0 \\ x_2(w) = 0 & \text{si } w \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

$x_3(t)$ se déduit donc de $x_6(t)$ qui est solution de l'équation différentielle linéaire (10) associée à la contrainte (11) et à la relation (2) donnant φ_3

Pour résoudre cette équation (10), rendons inutile la contrainte (11)

En réduisant, quand il est nécessaire, les intervalles d'intégration des termes de $\varphi_6(t)$, le second membre $\varphi_6(t)$ devient égal à une fonction $g(t)$ indépendante de la contrainte (11) (w étant toujours positif) :

si $t \leq \theta$: envisageons deux cas :

$$\underline{t \leq u_5} : \quad \varphi_6(t) = g(t) = \int_{\theta-t}^{\theta} f(\tau) x_2(t - \theta + \tau) d\tau \quad (12)$$

$$\underline{t > u_5} : \varphi_6(t) = g(t) = \int_{\theta-t}^{\theta} f(\tau) x_2(t-\theta+\tau) d\tau - u_4 \int_{\theta+u_5-t}^{\theta} f(\tau) x_2(t-\theta-u_5+\tau) d\tau \quad (13)$$

Si $t > \theta$: considérons trois cas :

$$\underline{0 \leq t \leq u_5} : \varphi_6(t) = g(t) = \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t-\theta+\tau) d\tau \quad (14)$$

$$\underline{\theta + u_5 \leq t < \theta} : \varphi_6(t) = g(t) = \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t-\theta+\tau) d\tau - u_4 \int_{\theta+u_5-t}^{\theta} f(\tau) x_2(t-\theta-u_5+\tau) d\tau \quad (15)$$

$$\underline{t > \theta + u_5} : \varphi_6(t) = g(t) = \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t-\theta+\tau) d\tau - u_4 \int_0^{\theta} f(\tau) x_2(t-\theta-u_5+\tau) d\tau \quad (16)$$

Par construction, $g(t)$ est une fonction continue.

La résolution de l'équation (10), sur chacune de ces plages, se fait

suivant la méthode classique de résolution d'équation différentielle linéaire :

$$\frac{dx_6(t)}{dt} + u_2 x_6(t) = g(t) \quad (17)$$

Soit t_0 l'origine de l'intervalle partiel considéré :

- $x_6(t_0)$ est connue :
 - . soit par résolution sur l'intervalle précédent ($t_0 \neq 0$)
 - . soit par la valeur initiale $x_6(0)$ si $t_0 = 0$.

Posons :

$$x_6(t) = y(t) \cdot z(t) \quad (18)$$

$$\text{où } y(t) \text{ est solution de } \frac{dy(t)}{dt} + u_2 y(t) = 0 \quad (19)$$

$$\text{c'est-à-dire : } y(t) = y(t_0) e^{-u_2(t-t_0)} \quad (20)$$

Donc, d'après (17) :

$$y(t) \frac{dz(t)}{dt} + z(t) \left(\frac{dy(t)}{dt} + u_2 y(t) \right) = g(t)$$

relation qui, compte tenu de (19) et (20), donne après intégration :

$$z(t) = z(t_0) + \frac{1}{y(t_0)} \int_{t_0}^t e^{u_2(t-t_0)} g(t) dt \quad (21)$$

La solution (18) s'écrit donc :

$$x_6(t) = y(t_0) z(t_0) e^{-u_2(t-t_0)} + e^{-u_2(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{u_2(t-t_0)} g(t) dt$$

c'est-à-dire :

$$x_6(t) = x_6(t_0) e^{-u_2(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-u_5(t-v)} g(v) dv \quad (22)$$

La résolution se fait ainsi successivement sur l'ensemble des intervalles définis précédemment. Elle n'offre aucune difficulté mais conduit à des calculs assez fastidieux de combinaisons linéaires d'intégrales du type :

$$\int_{t_0}^t e^{-u_2(t-v)} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} f(\tau) \sum_{i=1}^3 a_i e^{b_i(v-\theta+\tau)} d\tau dv \quad (23)$$

où $f(\tau)$ est la fonction constante "par morceaux" précédemment rencontrée.

Ce cas particulier qui conduit à des formules strictes est beaucoup plus intéressant que le précédent car il tient compte des difficultés principales du cas général. En effet, les résultats dépendent des seconds membres $\varphi_i(t)$ sous leur forme complète.

II - VERIFICATION DES METHODES DE RESOLUTION UTILISEES

Les résultats des méthodes numériques ont été vérifiés dans les deux cas particuliers cités où il est possible d'obtenir une solution stricte :

- les cas normaux ($u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$)

- les cas pathologiques où le fer des cellules mortes n'est pas réutilisé (x_1 , x_2 , x_4 et x_5 indépendants de x_3).

A - Vérification sur un cas normal

Les tableaux (p. 133 et p. 134) montrent les résultats obtenus en utilisant :

- la méthode à pas liés, implicite : le pas demeurant constant sur tout l'intervalle d'étude : $h = 0.01$ (jour)
- la méthode à pas liés, implicite : le pas étant modifié au cours de la résolution :

$$h_1 = 0.01 \quad (t < 2 \text{ j.})$$

$$h_2 = 0.10 \quad (t \geq 2 \text{ j.})$$

La précision des résultats obtenus avec un pas constant ($h = 0.01$) est assez surprenante puisqu'elle atteint 10^{-5} à 10^{-6} pour l'ensemble des fonctions $x_i(t)$.

Les résultats correspondant au changement de pas en cours de résolution, sont un peu moins bons mais leur précision est encore de l'ordre de 10^{-3} . Et le gain de temps est important puisque, sur cet exemple, la modification du pas fait passer la durée des calculs de :

$$\begin{array}{ll} 1.91 \text{ mn} & (\text{pour } h = 0.01) \\ \text{à} & \\ 0.40 \text{ mn} & (\text{pour } h_1 = 0.01 \text{ et } h_2 = 0.10). \end{array}$$

Mais la comparaison des méthodes ne peut être déduite de ces deux exemples seuls. En effet, la précision des résultats et la durée des calculs sont étroitement liées dans chacune d'entre elles, à la valeur du pas d'intégration. Aussi avons nous étudié en détail, dans la suite de ce chapitre, l'influence de ce paramètre avant de choisir la méthode de résolution du système intégral-différentiel qui sera utilisée au cours de l'identification des paramètres.



Résolution du système intégral-différentiel

Méthode à pas liés, implicite (pas constant)

t (jours)		$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_4(t)$	$x_6(t)$
0.01		0.789 137	0.158 252	$0.469\,831 \cdot 10^{-1}$	$0.111\,844 \cdot 10^{-5}$
	v. e*	0.789 149	0.158 239	$0.469\,802 \cdot 10^{-1}$	$0.110\,947 \cdot 10^{-5}$
0.02		0.623 046	0.272 860	$0.836\,609 \cdot 10^{-1}$	$0.825\,070 \cdot 10^{-5}$
	v. e*	0.623 048	0.272 858	$0.836\,603 \cdot 10^{-1}$	$0.824\,894 \cdot 10^{-5}$
0.03		0.492 182	0.353 782	0.112 232	$0.259\,312 \cdot 10^{-4}$
	v. e*	0.492 197	0.353 767	0.112 229	$0.259\,206 \cdot 10^{-4}$
0.10		$0.978\,196 \cdot 10^{-1}$	0.455 392	0.192 332	$0.609\,536 \cdot 10^{-3}$
	v. e*	$0.978\,381 \cdot 10^{-1}$	0.455 329	0.192 328	$0.609\,523 \cdot 10^{-3}$
0.50		$0.491\,688 \cdot 10^{-2}$	$0.513\,081 \cdot 10^{-1}$	0.161 348	$0.212\,040 \cdot 10^{-1}$
	v. e*	$0.491\,689 \cdot 10^{-2}$	$0.513\,082 \cdot 10^{-1}$	0.161 348	$0.212\,041 \cdot 10^{-1}$
1.00		$0.346\,251 \cdot 10^{-2}$	$0.118\,492 \cdot 10^{-1}$	0.113 774	0.103 749
	v. e*	$0.346\,251 \cdot 10^{-2}$	$0.118\,449 \cdot 10^{-1}$	0.113 775	0.103 749
2.00		$0.172\,166 \cdot 10^{-2}$	$0.526\,370 \cdot 10^{-2}$	$0.565\,720 \cdot 10^{-1}$	0.382 393
	v. e*	$0.172\,166 \cdot 10^{-2}$	$0.526\,370 \cdot 10^{-2}$	$0.565\,720 \cdot 10^{-1}$	0.382 393
5.00		$0.211\,649 \cdot 10^{-3}$	$0.646\,896 \cdot 10^{-3}$	$0.695\,457 \cdot 10^{-2}$	0.907 220
	v. e*	$0.211\,649 \cdot 10^{-3}$	$0.646\,896 \cdot 10^{-3}$	$0.695\,458 \cdot 10^{-2}$	0.907 221
10.00		$0.643\,277 \cdot 10^{-5}$	$0.196\,614 \cdot 10^{-4}$	$0.211\,374 \cdot 10^{-3}$	0.948 053
	v. e*	$0.643\,278 \cdot 10^{-5}$	$0.196\,615 \cdot 10^{-4}$	$0.211\,375 \cdot 10^{-3}$	0.948 054
15.00		$0.195\,515 \cdot 10^{-6}$	$0.597\,583 \cdot 10^{-6}$	$0.642\,443 \cdot 10^{-5}$	0.949 102
	v. e*	$0.195\,515 \cdot 10^{-6}$	$0.597\,583 \cdot 10^{-6}$	$0.642\,443 \cdot 10^{-5}$	0.949 103
20.00		$0.594\,240 \cdot 10^{-8}$	$0.181\,627 \cdot 10^{-7}$	$0.195\,261 \cdot 10^{-6}$	0.949 134
	v. e*	$0.594\,241 \cdot 10^{-8}$	$0.181\,627 \cdot 10^{-7}$	$0.195\,261 \cdot 10^{-6}$	0.949 135



Résolution du système intégro-différentiel

Méthode à pas liés, implicite (pas variable)

t (ours)		$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_4(t)$	$x_6(t)$
0.01	v.e*	0.789 137	0.158 252	$0.469\ 831 \cdot 10^{-1}$	$0.111\ 844 \cdot 10^{-5}$
		0.789 149	0.158 239	$0.469\ 802 \cdot 10^{-1}$	$0.110\ 947 \cdot 10^{-5}$
0.02	v.e*	0.623 046	0.272 860	$0.836\ 609 \cdot 10^{-1}$	$0.825\ 070 \cdot 10^{-5}$
		0.623 048	0.272 858	$0.836\ 603 \cdot 10^{-1}$	$0.824\ 894 \cdot 10^{-5}$
0.03	v.e*	0.492 182	0.353 782	0.112 232	$0.259\ 312 \cdot 10^{-4}$
		0.492 197	0.353 767	0.112 229	$0.259\ 206 \cdot 10^{-4}$
0.10	v.e*	$0.978\ 196 \cdot 10^{-1}$	0.455 392	0.192 332	$0.609\ 536 \cdot 10^{-3}$
		$0.978\ 381 \cdot 10^{-1}$	0.455 329	0.192 328	$0.609\ 523 \cdot 10^{-3}$
0.50	v.e*	$0.491\ 688 \cdot 10^{-2}$	$0.513\ 081 \cdot 10^{-1}$	0.161 348	$0.212\ 040 \cdot 10^{-1}$
		$0.491\ 689 \cdot 10^{-2}$	$0.513\ 082 \cdot 10^{-1}$	0.161 348	$0.212\ 041 \cdot 10^{-1}$
1.00	v.e*	$0.346\ 251 \cdot 10^{-2}$	$0.118\ 492 \cdot 10^{-1}$	0.113 774	0.103 749
		$0.346\ 251 \cdot 10^{-2}$	$0.118\ 449 \cdot 10^{-1}$	0.113 775	0.103 749
2.00	v.e*	$0.172\ 166 \cdot 10^{-2}$	$0.526\ 370 \cdot 10^{-2}$	$0.565\ 720 \cdot 10^{-1}$	0.382 393
		$0.172\ 166 \cdot 10^{-2}$	$0.526\ 370 \cdot 10^{-2}$	$0.565\ 720 \cdot 10^{-1}$	0.382 393
5.00	v.e*	$0.211\ 649 \cdot 10^{-3}$	$0.646\ 895 \cdot 10^{-3}$	$0.695\ 456 \cdot 10^{-2}$	0.906 316
		$0.211\ 649 \cdot 10^{-3}$	$0.646\ 896 \cdot 10^{-3}$	$0.695\ 458 \cdot 10^{-2}$	0.907 221
10.00	v.e*	$0.643\ 275 \cdot 10^{-5}$	$0.196\ 614 \cdot 10^{-4}$	$0.211\ 374 \cdot 10^{-3}$	0.947 129
		$0.643\ 278 \cdot 10^{-5}$	$0.196\ 615 \cdot 10^{-4}$	$0.211\ 375 \cdot 10^{-3}$	0.948 054
15.00	v.e*	$0.195\ 514 \cdot 10^{-6}$	$0.597\ 579 \cdot 10^{-6}$	$0.642\ 439 \cdot 10^{-5}$	0.948 178
		$0.195\ 515 \cdot 10^{-6}$	$0.597\ 583 \cdot 10^{-6}$	$0.642\ 443 \cdot 10^{-5}$	0.949 103
20.00	v.e*	$0.594\ 235 \cdot 10^{-8}$	$0.181\ 625 \cdot 10^{-7}$	$0.195\ 259 \cdot 10^{-6}$	0.948 210
		$0.594\ 241 \cdot 10^{-8}$	$0.181\ 627 \cdot 10^{-7}$	$0.195\ 261 \cdot 10^{-6}$	0.949 135

* v.e : valeur exacte ($h_1 = 0.01$; $h_2 = 0.10$) Durée des calculs : 0.40 mn

B - Vérification sur des cas pathologiques de "non-réutilisation"

Les vérifications ont été effectuées sur plusieurs cas et l'on peut constater que la précision des résultats de chacune des méthodes est du même ordre de grandeur que celle qui a été observée sur les cas normaux ci-dessus. Nous ne pouvons donner tous ces résultats, mais ceux qui concernent $x_6(t)$, fonction de base de l'identification, apparaissent au paragraphe suivant où nous étudions l'influence des divers paramètres.

III - INFLUENCE DES DIVERS PARAMETRES INTRODUITS POUR LA
RESOLUTION DU SYSTEME

La méthode à pas liés, implicite, à pas constant et la méthode de Kutta-Runge ne nécessitent qu'un seul paramètre :

h : le pas d'intégration.

La méthode à pas liés, implicite, avec modification du pas d'intégration fait appel à deux paramètres (c'est-à-dire trois constantes numériques)

h : le pas de calcul ou plus exactement les deux valeurs h_1 et h_2 prises par ce paramètre.

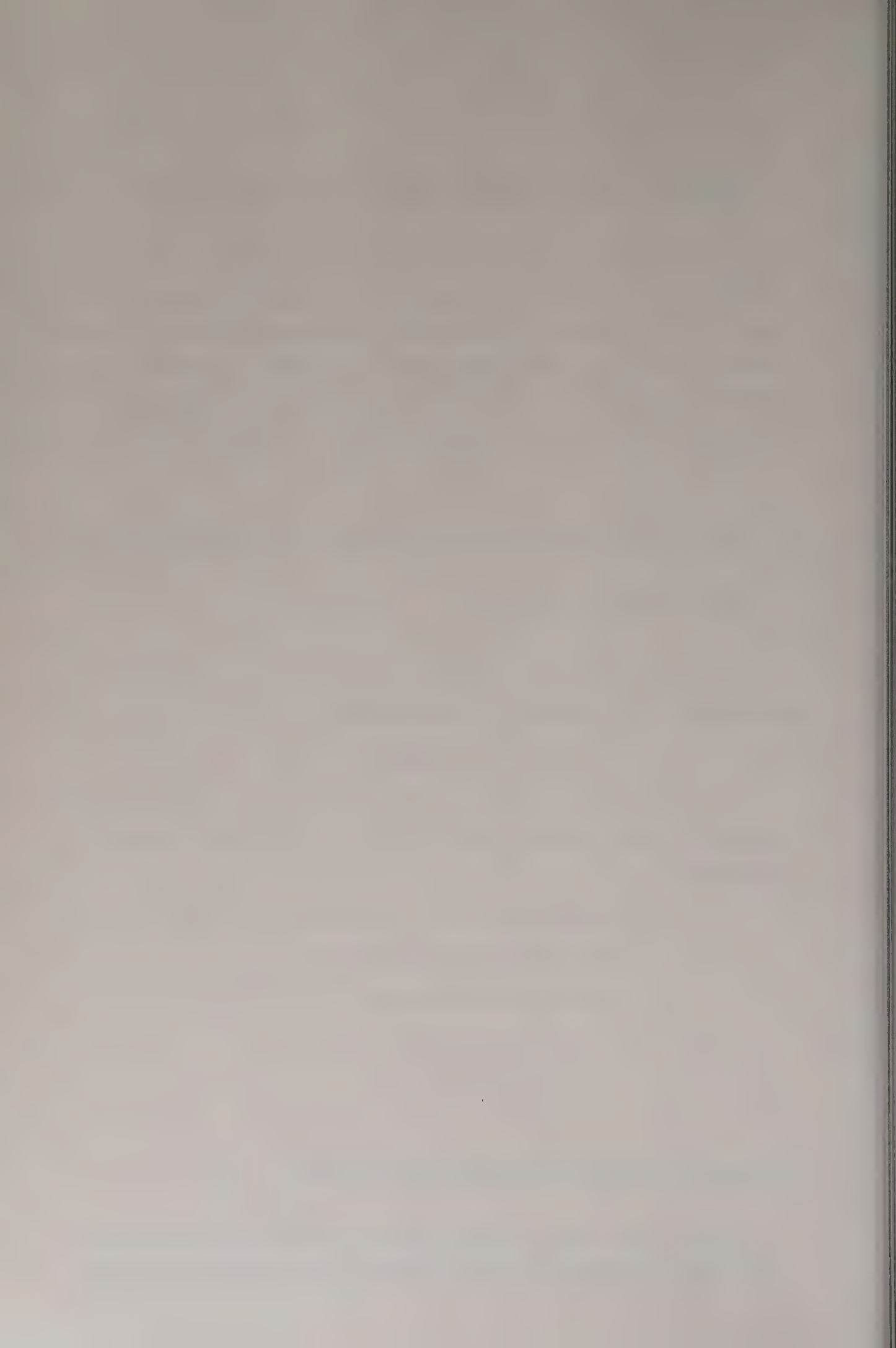
t_c : le moment du changement du pas tel que :

$$h = h_1 \quad \text{si } t < t_c$$

$$h = h_2 \quad \text{si } t \geq t_c$$

A : Méthode à pas liés, implicite, à pas constant

Le tableau de la page suivante représente les résultats obtenus pour $x_6(t)$, fonction de base de l'identification de notre problème, avec les



Méthode à pas liés, implicite (pas constant): influence du pas

t (jours)	$x_6(t)$ valeur exacte	$x_6(t)$ h = 0.01	$x_6(t)$ h = 0.02	$x_6(t)$ h = 0.05	$x_6(t)$ h = 0.10
0.50	0.021 140	0.021 140	0.021 137	0.021 118	0.020 246
1.00	0.103 115	0.103 115	0.103 107	0.103 057	0.101 129
2.00	0.372 796	0.372 796	0.372 784	0.372 744	0.370 066
3.00	0.582 428	0.582 428	0.582 414	0.582 355	0.580 137
4.00	0.697 564	0.697 564	0.697 550	0.697 424	0.695 412
5.00	0.713 444	0.713 444	0.713 432	0.713 336	0.711 309
6.00	0.699 658	0.699 658	0.699 645	0.699 549	0.697 579
7.00	0.685 340	0.685 339	0.685 328	0.685 234	0.683 302
8.00	0.673 593	0.673 592	0.673 581	0.673 489	0.671 595
9.00	0.661 189	0.661 189	0.661 177	0.661 088	0.659 231
10.00	0.648 562	0.648 561	0.648 550	0.648 462	0.646 642
15.00	0.587 262	0.587 261	0.587 251	0.587 171	0.585 525
20.00	0.531 389	0.531 388	0.531 379	0.531 307	0.529 818
Durée des calculs		1.91 mn	0.77 mn	0.33 mn	0.22 mn

différentes valeurs du pas de calcul :

$$h = 0.01 \quad (\text{jour})$$

$$h = 0.02$$

$$h = 0.05$$

$$h = 0.10$$

Les données correspondent à un cas pathologique simulé de mort extramédullaire sans réutilisation du fer des cellules mortes :

$$u_2 = 0.020$$

$$u_4 = 0.200$$

$$u_5 = 1.500$$

$$u_1 = u_3 = 0$$

Les autres données ($f(\tau) \dots$) sont reportées en Annexe.

Les résultats montrent que le temps de calcul décroît très vite lorsque l'on augmente le pas. En effet, non seulement le nombre des itérations est alors réduit mais le calcul de chacune dure moins longtemps puisque le pas intervient dans la recherche des intégrales du second membre :

$$h = 0.01 \quad \text{durée des calculs} = 1.91 \text{ mn}$$

$$h = 0.02 \quad \text{durée des calculs} = 0.77 \text{ mn}$$

$$h = 0.05 \quad \text{durée des calculs} = 0.22 \text{ mn.}$$

La précision obtenue avec $h = 0.01$ est de l'ordre de 10^{-6} , précision excellente mais coûteuse puisque la durée des calculs atteint 1.91 mn. Cette valeur de h ne peut être envisagée pour l'identification qui nécessite, en moyenne, par exemple, 60 résolutions du système pour déterminer 3 des paramètres u_i .

Des essais d'identification en utilisant la méthode à pas liés, implicite, à pas constant, ont été effectués successivement avec :

$$h = 0.02$$

$$h = 0.05$$

Les résultats en sont présentés au chapitre suivant (VI).

Remarque 1 : les temps de calculs indiqués correspondent à une exécution du programme de résolution. En réalité, au cours de l'identification de nombreux calculs intermédiaires sont conservés en mémoire et l'on peut abaisser sensiblement les temps de calcul moyens de 0.10 mn environ.

Remarque 2 : la durée des calculs varie d'un cas à l'autre suivant la valeur de τ_A ("âge" des cellules qui meurent). En effet, les intégrales :

$$\int_0^{\tau_A} f(\tau) x_2(t - \tau_A + \tau) d\tau$$

demandent un "temps machine" d'autant plus long que τ_A est plus grand.

B - Méthode à pas liés, implicite avec modification du pas

Initialement égal à h_1 , le pas d'intégration prend la valeur h_2 à l'instant t_c .

B1 - Influence des deux valeurs h_1 et h_2 du pas d'intégration ($t_c = 2$)

Retenant les données utilisées pour la méthode précédente (III A), nous avons choisi 4 couples de valeurs (h_1, h_2) pour lesquels nous avons relevé les temps de calcul suivants :

$$\left. \begin{array}{l} h_1 = 0.010 \\ h_2 = 0.050 \end{array} \right\} \text{ durée des calculs} = 0.53 \text{ mn}$$

$$\left. \begin{array}{l} h_1 = 0.025 \\ h_2 = 0.050 \end{array} \right\} \text{ durée des calculs} = 0.43 \text{ mn}$$

$$\left. \begin{array}{l} h_1 = 0.010 \\ h_2 = 0.100 \end{array} \right\} \text{ durée des calculs} = 0.40 \text{ mn}$$

$$\left. \begin{array}{l} h_1 = 0.020 \\ h_2 = 0.100 \end{array} \right\} \text{durée des calculs} = 0.34 \text{ mn}$$

Les résultats (p. 140) sont en moyenne moins précis que ceux qui ont été obtenus en gardant un pas constant, pour une durée des calculs du même ordre de grandeur.

Cependant, comme précédemment, la durée en machine représente une résolution du système intégral-différentiel comprenant des calculs intermédiaires communs à toutes les résolutions successives nécessitées par notre problème d'identification. Or, le volume de ces calculs communs est presque doublé par rapport à ceux de la méthode précédente. Aussi la comparaison des "temps-machine" de la résolution du système dans les deux cas ne peut être que très approximative, pour l'application à notre problème particulier. Aussi, étudierons-nous au chapitre suivant, l'influence de la méthode de résolution et celle de la valeur du pas utilisé sur la précision des résultats et la durée des calculs de l'identification des paramètres u_i .

D'autre part, h_1 et h_2 ne sont pas les seuls paramètres et, comme nous allons le voir, le moment t_c de la modification du pas, joue un grand rôle.

B2 - Influence du moment t_c du changement de la valeur du pas

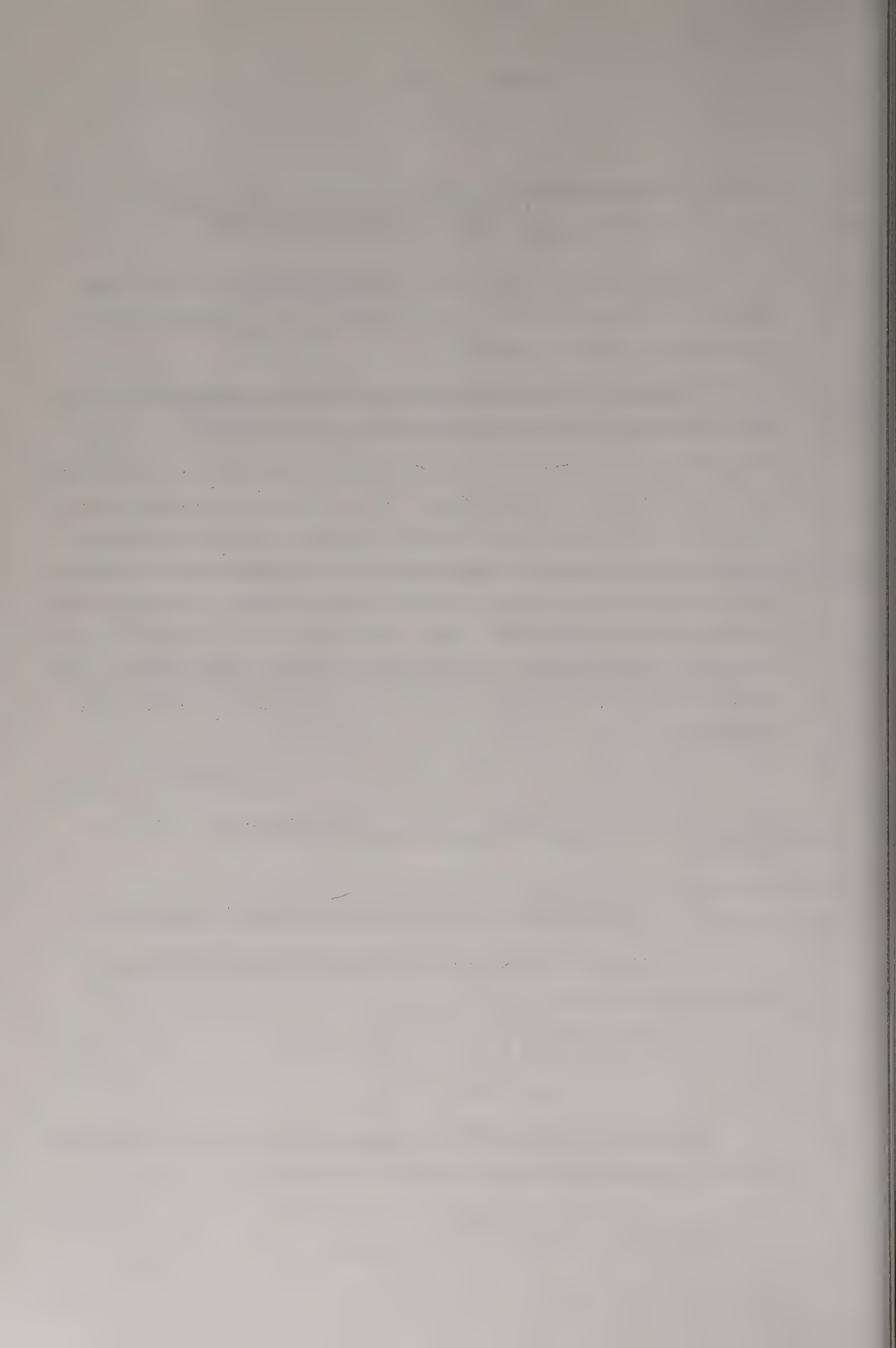
L'étude a été faite sur l'exemple précédent en utilisant comme valeurs du pas :

$$h_1 = 0.02$$

$$h_2 = 0.10$$

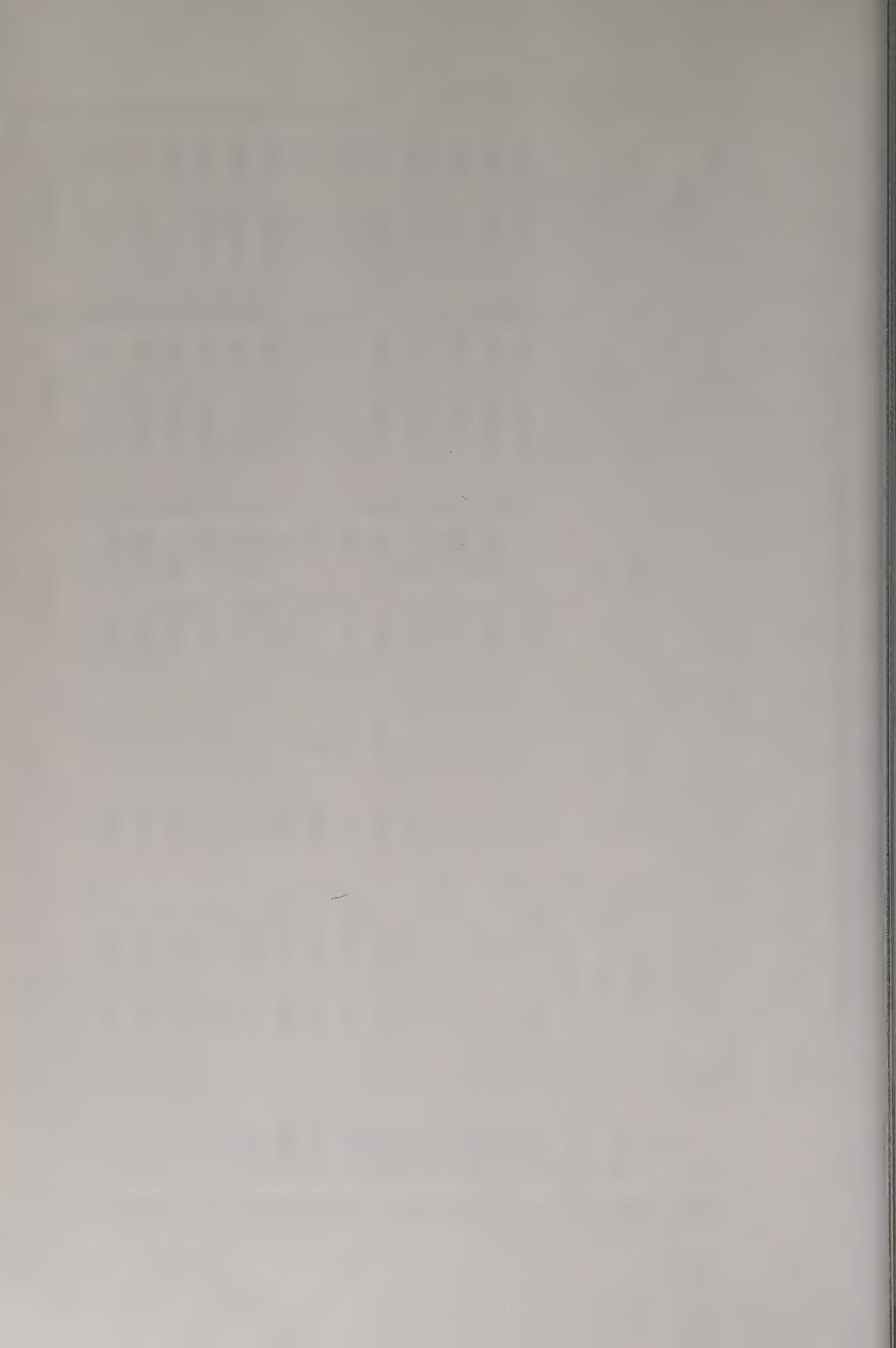
Le tableau de la page 141 correspond aux résultats obtenus respectivement en modifiant le pas de calcul aux instants :

$$t_c = 5 \text{ jours}$$



$$t_c = 2 \text{ jours} \quad h = h_1 \quad \text{sit} < t_c$$
$$h = h_2 \quad \text{sit} \geq t_c$$

t (jours)	$x_6(t)$ valeur exacte	$x_6(t)$ $h_1 = 0.01$ $h_2 = 0.05$	$x_6(t)$ $h_1 = 0.025$ $h_2 = 0.050$	$x_6(t)$ $h_1 = 0.01$ $h_2 = 0.10$	$x_6(t)$ $h_1 = 0.02$ $h_2 = 0.10$
0.50	0.021 140	0.021 134	0.021 138	0.021 139	0.021 137
1.00	0.103 115	0.103 115	0.103 110	0.103 115	0.103 107
2.00	0.372 796	0.372 797	0.372 792	0.372 797	0.372 784
3.00	0.582 428	0.582 479	0.582 435	0.582 207	0.582 149
4.00	0.697 564	0.697 802	0.697 617	0.696 678	0.696 439
5.00	0.713 444	0.713 652	0.713 490	0.712 712	0.712 504
6.00	0.699 658	0.699 885	0.699 714	0.698 965	0.698 745
7.00	0.685 340	0.685 553	0.685 392	0.684 659	0.684 452
8.00	0.673 593	0.673 802	0.673 643	0.672 925	0.672 722
9.00	0.661 189	0.661 395	0.661 239	0.660 535	0.660 336
10.00	0.648 562	0.648 763	0.648 611	0.647 920	0.647 725
15.00	0.587 262	0.587 443	0.587 306	0.586 681	0.586 505
20.00	0.531 389	0.531 553	0.531 429	0.530 864	0.530 704
Durée des calculs		0.53 mn	0.43 mn	0.40 mn	0.34 mn



Méthode à pas liés, implicite (pas variable) influence du moment, t_c , de la modification de h

$h = 0.02$ si $t < t_c$

$h = 0.10$ si $t \geq t_c$

t (jours)	$x_6(t)$ valeur exacte	$x_6(t)$ $t_c = 5$	$x_6(t)$ $t_c = 3$	$x_6(t)$ $t_c = 2$	$x_6(t)$ $t_c = 1$
0.50	0.021 140	0.021 137	0.021 137	0.021 137	0.021 137
1.00	0.103 115	0.103 107	0.103 107	0.103 107	0.103 107
2.00	0.372 796	0.372 784	0.372 784	0.372 784	----- 0.372 249
3.00	0.582 428	0.582 414	0.582 414	----- 0.582 149	0.581 596
4.00	0.697 564	0.697 550	0.696 706	0.696 439	0.695 988
5.00	0.713 444	0.713 432	0.712 737	0.712 505	0.712 062
6.00	0.699 658	0.699 618	0.698 973	0.698 745	0.698 311
7.00	0.685 340	0.685 305	0.684 675	0.684 452	0.684 026
8.00	0.673 593	0.673 558	0.672 942	0.672 722	0.672 306
9.00	0.661 189	0.661 156	0.660 551	0.660 336	0.659 928
10.00	0.648 562	0.648 529	0.647 936	0.647 726	0.647 325
15.00	0.587 262	0.587 232	0.586 695	0.586 505	0.586 143
20.00	0.531 389	0.531 362	0.530 876	0.530 704	0.530 376
Durée des calculs		0.42 mn	0.36 mn	0.34 mn	0.32 mn

$$t_c = 3 \text{ jours}$$

$$t_c = 2 \text{ jours}$$

$$t_c = 1 \text{ jour}$$

Nous constatons que l'influence de t_c est sensible sur le "temps-machine" puisqu'une modification de la valeur de ce paramètre peut faire passer la durée des calculs de 0.42 mn à 0.32 mn.

Mais l'influence de t_c est surtout importante sur la précision des résultats, en effet :

. pour $t_c = 5 \text{ j.}$: la précision est de l'ordre de 10^{-4}

. pour $t_c = 1 \text{ j.}$: la précision n'est plus que de 10^{-2} .

Ce gain de précision obtenu en augmentant la valeur de t_c est important et met en évidence l'intérêt de cette variante de la méthode à pas liés, implicite. En effet, une précision des résultats de l'ordre de 10^{-4} est obtenue en utilisant cette méthode avec des durées de calcul très différentes selon la version retenue :

. méthode à pas constant ($h = 0.02$)

durée des calculs = 0.77 mn

. méthode à pas variable ($h_1 = 0.02$; $h_2 = 0.10$; $t_c = 5 \text{ j.}$)

durée des calculs = 0.42 mn.

C - La méthode mixte de type Kutta-Runge

Rappelons qu'il s'agit d'une méthode de Kutta-Runge du troisième ordre où les dérivées sont calculées par l'intermédiaire d'une extrapolation à partir des trois derniers points connus.

Les résultats de l'étude de l'influence du pas d'intégration apparaissent dans le tableau de la page suivante. Ils correspondent aux données du cas normal utilisées pour vérifier les méthodes précédentes (tableaux p. 133 et p. 134). Les valeurs affectées au pas d'intégration sont :

Résolution du système intégral - différentiel

Méthode mixte de type Kutta - Runge : influence du pas (cas de l'individu normal)

t (ours)	$x_6(t)$ valeur exacte	$x_6(t)$ h = 0.010	$x_6(t)$ h = 0.025	$x_6(t)$ h = 0.050
05	0.000 104	0.000 104	0.000 106	0.000 112
10	0.000 609	0.000 605	0.000 556	0.000 675
50	0.021 204	0.021 093	0.019 929	0.004 939
00	0.103 749	0.103 315	0.098 606	0.027 987
00	0.382 394	0.382 001	0.366 746	0.129 319
00	0.644 893	0.644 095	0.620 041	0.242 099
00	0.828 316	0.827 793	0.800 268	0.334 359
00	0.907 221	0.906 951	0.878 363	0.383 643
00	0.931 422	0.931 155	0.902 462	0.404 258
00	0.940 333	0.940 062	0.911 372	0.413 161
00	0.944 759	0.944 485	0.915 796	0.417 583
00	0.946 960	0.946 682	0.917 996	0.419 783
00	0.948 054	0.947 322	0.919 089	0.420 876
00	0.949 103	0.948 807	0.920 134	0.421 925
00	0.949 136	0.948 826	0.920 160	0.421 957
Durée des calculs		1.48 mn	0.35 mn	0.15 mn

$$h = 0.010 \quad (\text{jour})$$

$$h = 0.025$$

$$h = 0.050$$

Nous constatons que seule la première valeur ($h = 0.010$) donne des résultats assez bons dont la précision est de l'ordre de 10^{-3} . Un pas $h = 0.025$ correspond à une précision à peine acceptable (3×10^{-2}). Quand à la valeur $h = 0.05$, elle conduit à des résultats aberrants. Les temps de calcul deviennent relativement élevés pour la précision obtenue :

$h = 0.010$	durée des calculs = 1.48 mn	précision $\approx 10^{-3}$
$h = 0.025$	durée des calculs = 0.35 mn	précision ≈ 0.03
$h = 0.050$	" " = 0.15 mn	" ≈ 0.50 .

Cette méthode est moins efficace que les précédentes : la raison essentielle en est l'existence d'une phase d'amorçage où l'ordre des extrapolations est réduit, à la différence de la méthode à pas liés, implicite, où nous conservons un support de quatre points pendant toute la résolution du système (chapitre III).

Ce phénomène est aggravé par l'allure de la fonction $x_2(t)$ qui possède un maximum très aigu au début de l'intervalle d'étude (ce dernier étant de 20 jours) :

$$\begin{aligned} x_2(0) &= 0 \\ x_2(0.07) &= 0.47 \quad (\text{maximum}) \\ x_2(0.20) &= 0.28 \\ x_2(0.50) &= 0.05 \\ x_2(t) &\leq 0.01 \quad \text{si } t \geq 1 \end{aligned}$$

Lorsque $h = 0.05$, le maximum se produit pendant la phase d'amorçage à un instant t_M tel que :

$$h < t_M < 2h.$$

Or, la médiocrité de la précision des deux premiers pas se répercute non seulement sur les valeurs initiales $x_i(2h)$ de la phase itérative

mais également sur le calcul des intégrales du second membre pendant une centaine d'itérations :

$$\int_0^v f(\tau) x_2(t - v + \tau) d\tau$$

puisque, à chaque itération, v prend les deux valeurs :

$$v = \theta (\sim 5 \text{ jours})$$

$$v = \tau_A (\sim 1 \text{ à } 4 \text{ jours}).$$

Rappelons également qu'au chapitre III, nous avons mis en évidence la différence de l'ordre des diverses approximations au cours de la phase itérative des méthodes employées :

- . les méthodes à pas liés, implicites, utilisant des interpolations d'ordre 3 (support de 4 points)
- . la méthode de Kutta - Runge faisant appel à des extrapolations d'ordre 2 (support de 3 points).

La comparaison est donc déjà une peu faussée. Mais il faut remarquer que l'élévation de l'ordre de l'extrapolation de la dernière méthode ne modifie pas les résultats des deux premiers pas. Et c'est justement l'existence de cette phase d'amorçage qui est l'une des causes principales du manque de précision.

IV - CHOIX DE LA METHODE DE RESOLUTION DU SYSTEME INTEGRE DIFFERENTIEL pour application au problème d'identification.

Comme nous l'avons vu, l'identification de trois paramètres u_i nécessite en moyenne 50 résolutions du système intégro-différentiel. Aussi, l'étude du temps de calcul en fonction de la précision des résultats de chacune des méthodes, est-elle nécessaire. Pour faciliter la compara

dans chacun des cas nous avons relevé la durée des calculs et l'écart relatif moyen entre les valeurs exactes et les résultats obtenus aux points qui nous serviront pour l'ajustement :

$$t_{(\text{jours})} = 1 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 15 \text{ et } 20$$

Le tableau (p. 147) montre que, parmi les exemples traités, nous obtenons :

. une excellente précision (10^{-6}) :

par la méthode à pas liés, implicite, en prenant :

$$h = 0.01 \text{ sur tout l'intervalle}$$

mais la durée des calculs est alors très élevée (1.91 mn).

. une bonne précision (10^{-4} à 10^{-5})

- par la méthode à pas liés, implicite, avec un pas constant :

$$h = 0.02 \text{ sur tout l'intervalle}$$

- par la méthode à pas liés, implicite, avec modification du pas de calcul :

$$\begin{cases} h_1 = 0.02 & \text{si } t < 5 \text{ (jours)} \\ h_2 = 0.10 & \text{si } t \geq 5 \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} h_1 = 0.01 & \text{si } t < 2 \\ h_2 = 0.05 & \text{si } t \geq 2 ; \end{cases}$$

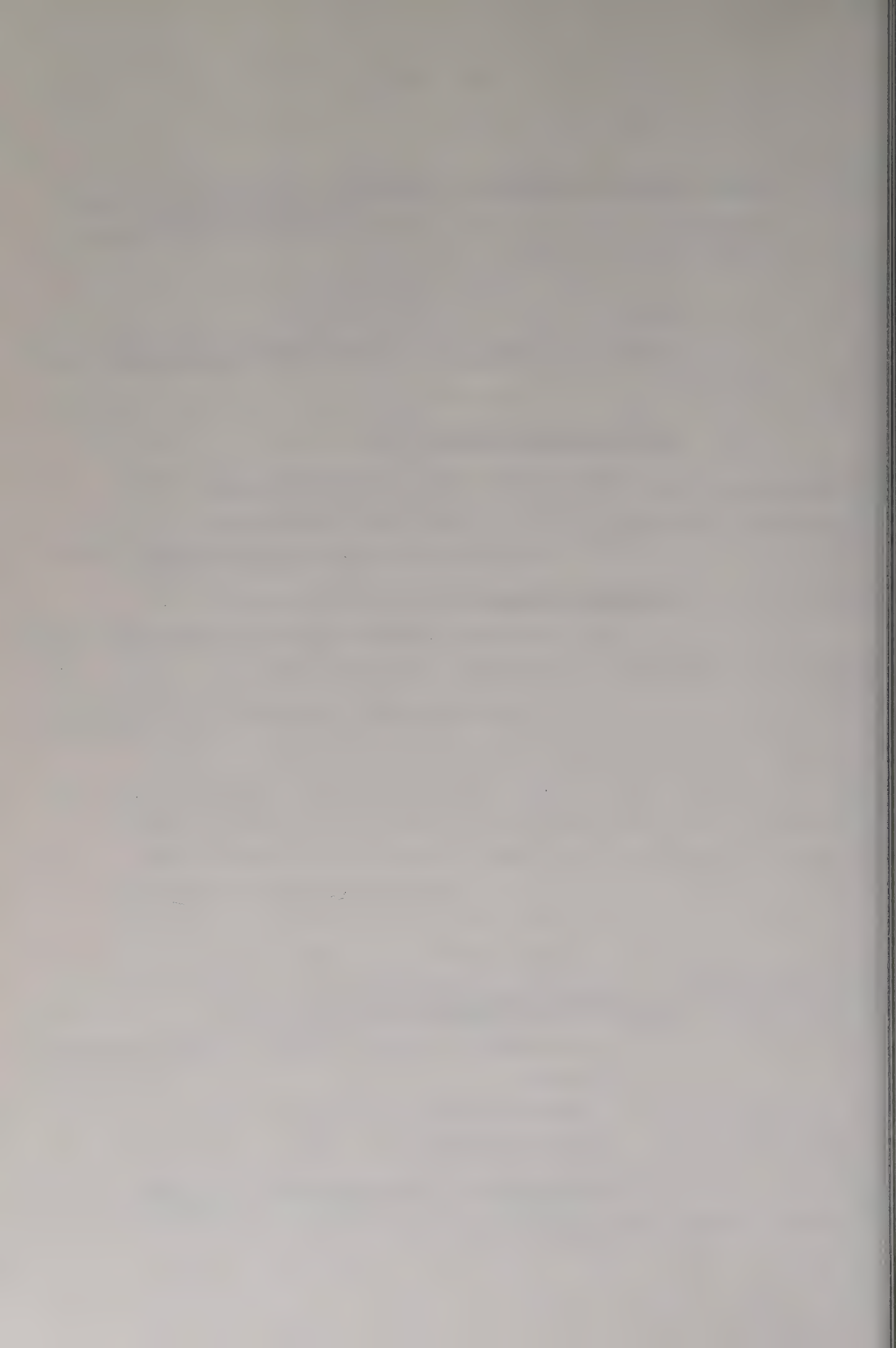
. une précision moyenne (10^{-3} à 10^{-4})

- par la méthode à pas liés, implicite, lorsque le pas garde la valeur :

$$h = 0.05$$

sur tout l'intervalle

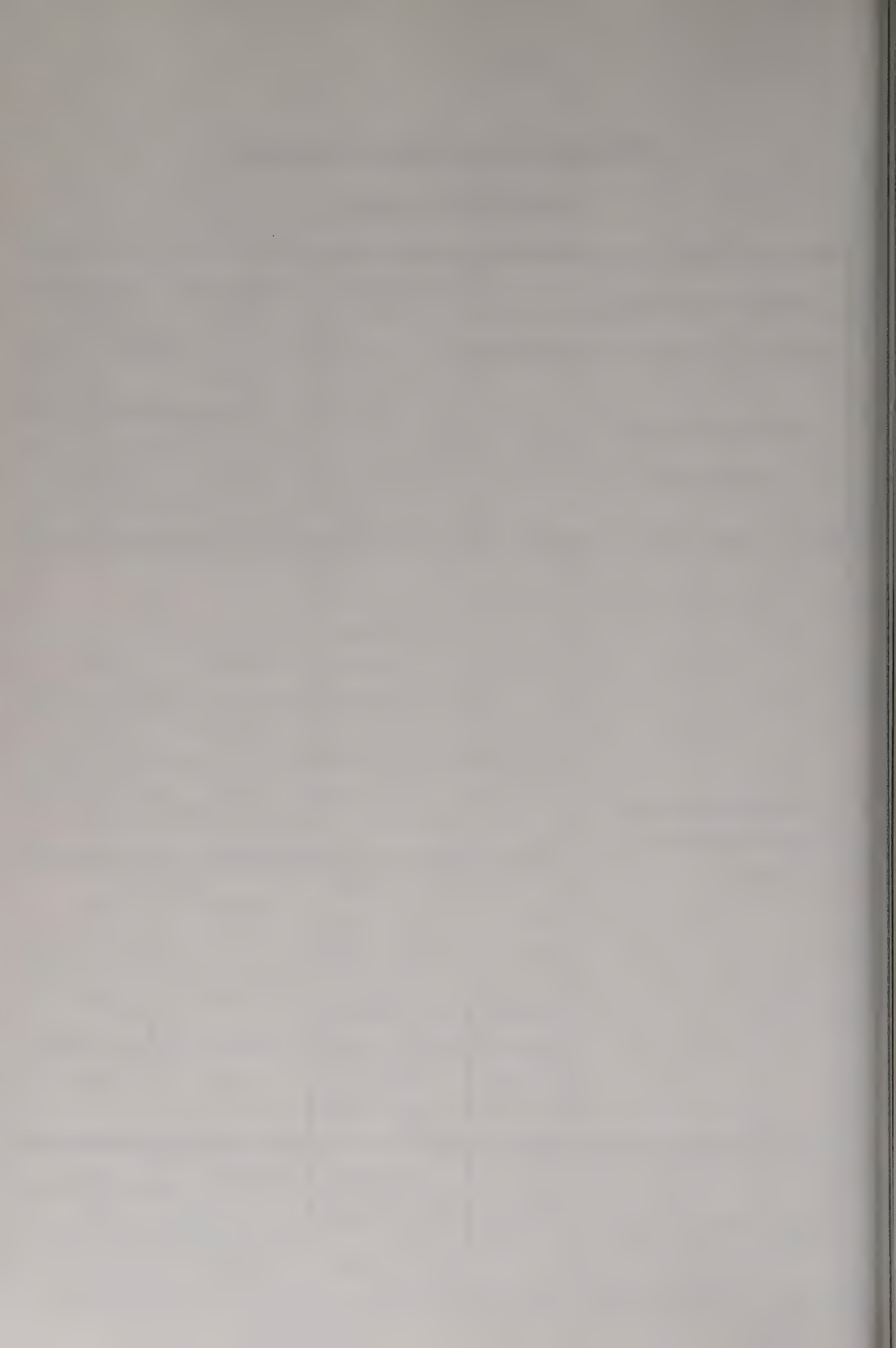
- par la méthode à pas liés, implicite, avec modification du pas, en prenant :



Résolution du système intégral-différentiel

Comparaison des Méthodes

Méthode de résolution		Pas de calcul	Ecart relatif moyen	Durée des calculs (mn)
Pas liés, implicite - pas constant		$h = 0.01$	10^{-6}	1.91
		$h = 0.02$	2.7×10^{-5}	0.77
		$h = 0.05$	2.1×10^{-4}	0.33
		$h = 0.10$	5.5×10^{-3}	0.22
Pas liés implicite, avec modification du pas	t_c			
	5	$h_1 = 0.02$ $h_2 = 0.10$	4.9×10^{-5}	0.42
	3	"	7.7×10^{-4}	0.36
	2	"	1.0×10^{-3}	0.34
	1	"	1.6×10^{-3}	0.32
	$t_c = 2$	$h_1 = 0.01$ $h_2 = 0.05$	6×10^{-5}	0.53
	$t_c = 2$	$h_1 = 0.01$ $h_2 = 0.10$	7×10^{-4}	0.40
	$t_c = 2$	$h_1 = 0.02$ $h_2 = 0.10$	10^{-3}	0.34
Kutta - Runge		$h = 0.010$	9.7×10^{-4}	1.48
		$h = 0.025$	3.4×10^{-2}	0.35
		$h = 0.050$	5.9×10^{-1}	0.15



$$\begin{cases} h_1 = 0.02 & \text{si } t < t_c \\ h_2 = 0.10 & \text{si } t \geq t_c \end{cases}$$

le moment t_c du changement du pas étant tel que :

$$t_c = 2 \text{ ou } 3 \text{ (jours)}$$

- par la méthode de Kutta Runge avec :

$$h = 0.01$$

La méthode de Kutta Runge qui nécessite un pas très faible pour obtenir une précision acceptable semble peu appropriée à notre problème d'identification, car la durée des calculs devient alors trop importante. Nous ne l'utiliserons pas pour le problème inverse.

Par contre, il est difficile de départager l'efficacité des deux versions de la méthode à pas liés, implicite :

Nous avons en effet remarqué ci-dessus qu'une partie des calculs était indépendante des paramètres et pouvait donc ne pas être répétée à chaque itération de l'identification. Or, ces calculs sont plus importants dans la version où le pas d'intégration est modifié que dans celle où le pas reste constant. La comparaison des "temps-machine" n'est donc pas tout à fait valable pour notre application particulière.

D'autre part, pour l'identification des paramètres u_1 , un problème se pose :

|| dans quelle mesure la supériorité en précision de la méthode
|| de résolution du système intégral-différentiel accélère-t-elle
|| la convergence de la méthode d'identification ?

Il semble qu'une réponse soit difficile à donner à priori. C'est pourquoi nous avons essayé ces deux versions de la méthode à pas liés, implicite, dans l'identification même des paramètres u_1 afin d'établir une comparaison valable pour notre problème particulier. Les résultats de cette comparaison sont donnés au cours du prochain chapitre.

CONCLUSION

Ces deux cas particuliers où le système intégral-différentiel possède une solution explicite nous ont permis de vérifier les résultats des diverses méthodes de résolution et d'en apprécier la précision des résultats.

Nous avons pu ainsi constater la supériorité de la méthode à paramètres liés, implicite, sur la méthode de Kutta Runge pour notre problème particulier.

Cependant, dans ce chapitre, nous avons considéré une résolution isolée du système intégral-différentiel. L'efficacité des méthodes présentées peut être différente pour notre application particulière où l'identification des paramètres exige un grand nombre de résolutions successives de ce système avec stockage éventuel de résultats intermédiaires.

Aussi, au cours du chapitre suivant, testerons nous l'efficacité de ces méthodes de résolution du système dans l'ensemble même du programme d'identification des paramètres.

CHAPITRE VI

IDENTIFICATION DES PARAMETRES PAR LA METHODE

DE QUADRATISATION PARTIELLE

Vérification des résultats sur des cas pathologiques simulés



Partant de données reconstituées par simulation de cas pathologiques dont on connaît les valeurs exactes des paramètres u_i , nous appliquons notre méthode pour rechercher ces valeurs. Outre la vérification des programmes, nous pouvons aussi étudier la convergence de la méthode, la précision des résultats obtenus et la durée des calculs. Diverses influences interviennent qu'il s'agit donc de tester : le choix de la méthode de résolution du système intégral-différentiel, le nombre et la nature des paramètres ajustés, les valeurs initiales, le nombre des données...

Cette étape paraît indispensable pour pouvoir entreprendre, dans de bonnes conditions, l'exploitation des données réelles de laboratoire.

I.- VERIFICATION DE LA METHODE ET DES PROGRAMMES

Cette vérification concerne à la fois la validité du choix de la méthode de quadratisation partielle pour l'identification de paramètres dans notre problème particulier et la mise au point des programmes.

Nous avons retenu les cas pathologiques dont le système intégral-différentiel possède une solution explicite (chapitre V -I.B : cas de "non réutilisation" du fer des cellules mortes). La vérification est ainsi rigoureuse puisque nous connaissons alors les valeurs exactes de paramètres u_i qui correspondent strictement aux données $x_6(t_k)$ de l'identification.

La vérification des résultats de la méthode de quadratisation partielle a été effectuée sur les cas simulés de différents types d'anomalies pathologiques rencontrées,

- mort de cellules intramédullaires (identification de u_1)
- mort extramédullaire des hématies (identification simultanée de u_2 , u_4 et u_5)
- mort de cellules à leur sortie de la moelle (identification de u_3).

Nous ne pouvons donner tous les résultats mais reportons ceux qui concernent la mort extramédullaire qui nécessite l'identification de 3 paramètres. Dans les deux exemples suivants la résolution du système est faite par la méthode des pas liés, implicite ($h = 0.02$).

A - 1er exemple : Identification des 3 paramètres traduisant la mort extramédullaire

Rappelons leur définition

u_2 : pourcentage de destruction "au hasard" de globules indépendamment de l'âge

u_4 : pourcentage de mort liée à "l'âge" des globules (u_5)

u_5 : "âge" de ces globules qui meurent, c'est-à-dire l'intervalle de temps séparant leur sortie de la moelle et leur mort.

Rappelons également les contraintes :

$$0 \leq u_2 \leq 1, \quad 0 \leq u_4 \leq 1, \quad 0 < u_5 \leq 20$$

Pour les données $x'_6(t_k)$, nous avons utilisé 10 points :

$t = 0.5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 10 ; 15$ et 20 (jours)

Les valeurs $x'_6(t_k)$ correspondantes sont celles du tableau 1 (p. 153), les autres données sont fournies en Annexe.

Dans cet exemple, le système intégral-différentiel est résolu par la méthode à pas liés, implicite, le pas demeurant constant sur tout l'intervalle ($h = 0.02$).

Les résultats de l'identification sont reproduits dans le tableau ci-après, les détails des itérations successives étant donnés dans le tableau 1 (p. 153). Rappelons que le coût représente la somme des carrés des écarts :

$$\sum_{k=1}^{10} (x'_6(t_k) - x_6(t_k))^2$$

L'identification revient à minimiser cette somme. Cette quantité, ou coût est donc un critère de qualité de l'identification.

Itération	u_2	u_4	u_5	coût
Val. init.	0.0100	0.1000	3.0000	0.1295
IT = 1	-0.0044	0.4490	3.0000	0.36×10^{-1}
	0.0000	0.3412	3.0000	0.28×10^{-1}
IT = 2	0.0067	0.3116	1.8301	0.75×10^{-2}
IT = 3	0.0194	0.2046	1.6707	0.78×10^{-4}
IT = 4	0.0199	0.2010	1.5095	0.96×10^{-6}
valeur exacte	0.0200	0.2000	1.5000	0

Les quatre premières itérations conduisent à une précision des résultats variant entre 10^{-2} et 10^{-3} pour les paramètres u_i , alors que les valeurs $x'_6(t_k)$ correspondant aux résultats ont un écart relatif moyen, par rapport aux données, compris entre 10^{-3} et 10^{-4} (voir tableau p. 153).

Commentaires : sur cet exemple ; nous observons deux "ratrapages" successifs de la méthode d'identification.

- Le hessien calculé à partir des valeurs initiales, n'étant pas une matrice définie positive, au cours de la première itération, une réduction de 3 à 2 des dimensions de l'espace s'est produite, la variable non prise en compte étant u_5 (chapitre II). Le coût devient ainsi quatre fois plus petit.
- Au cours de la première itération également, la valeur obtenue pour u_2 débordait légèrement du domaine permis (contrainte : $u_2 \geq 0$). Les accroissements des paramètres ont alors été réduits

Cas de mort extramédullaire (h = 0.02)

	valeurs initiales	IT = 1		IT=2	IT=3	IT=4	valeurs exactes
u ₂	0.0100	-0.0044	0.0000	0.0067	0.0194	0.0199	0.0200
u ₄	0.1000	0.4490	0.3412	0.3116	0.2046	0.2010	0.2000
u ₅	3.0000	3.0000	3.0000	1.8301	1.6207	1.5095	1.5000
coût	0.1295	0.36x10 ⁻¹	0.28x10 ⁻¹	0.75x10 ⁻²	0.78x10 ⁻⁴	0.96x10 ⁻⁶	0
t	$\frac{x_6'(t)}{\text{données}}$	$\frac{x_6(t)}{\text{}}$	$\frac{x_6(t)}{\text{}}$	$\frac{x_6(t)}{\text{}}$	$\frac{x_6(t)}{\text{}}$	$\frac{x_6(t)}{\text{}}$	$\frac{x_6(t)}{\text{}}$
0.5	0.0212	0.0212	0.0212	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211
1.0	0.1034	0.1039	0.1037	0.1035	0.1031	0.1031	0.1031
2.0	0.3796	0.3835	0.3824	0.3800	0.3749	0.3728	0.3728
3.0	0.6370	0.6481	0.6449	0.5954	0.5887	0.5823	0.5824
4.0	0.8026	0.7872	0.7929	0.6864	0.7021	0.6972	0.6975
5.0	0.8453	0.7445	0.7767	0.6797	0.7153	0.7129	0.7134
7.0	0.8169	0.5836	0.6577	0.6325	0.6833	0.6848	0.6853
10.0	0.7892	0.5484	0.6272	0.6181	0.6471	0.6483	0.6485
15.0	0.7505	0.5577	0.6253	0.5976	0.5876	0.5874	0.5872
20.0	0.7135	0.5701	0.6252	0.5778	0.5332	0.5319	0.5314

pour saturer cette contrainte (voir chapitre II - remarque p. 41).

Remarquons que, dans ce cas particulier, cette correction due à la contrainte a fait également diminuer le coût. Ce n'est évidemment pas une règle générale.

B - 2ème exemple : identification de deux paramètres

Il s'agit du même cas pathologique simulé, mais nous n'identifions plus que deux paramètres u_4 et u_5 (u_2 ayant sa valeur exacte). Cet exemple montre l'utilité du 3ème mode de "rattrapage" de la méthode d'identification : celui des bipartitions (chapitre II p. 38 et 40).

	u_4	u_5	coût
Val. init.	0.1000	3.0000	0.48×10^{-1}
IT = 1	0.2146	3.0000	0.13×10^{-1}
IT = 2	0.2197	0.1433	0.19×10^{-1}
	0.2172	1.5716	0.79×10^{-3}
IT = 3	0.2012	1.5143	0.37×10^{-5}
Val. ex.	0.2000	1.5000	0

Commentaires sur ces résultats :

- A la 1ère itération, comme dans le cas précédent u_5 conserve sa valeur car le hessien n'était pas une matrice définie positive, et la recherche de l'espace réduit $R^p (=R^2)$ du chapitre II (IV) nous a fait éliminer provisoirement u_5 des inconnues.
- C'est à la 2ème itération qu'intervient la correction par bipartitions. Le coût étant supérieur à celui de la 1ère itération, les accroissements des paramètres sont divisés par 2, conformément au chapitre (II) ($\lambda = 1/2$). Cette méthode de "rattrapage" provoque une forte réduction du coût qui est ainsi rendu 25 fois plus petit.

Remarque : Ces deux exemples illustrent l'application à un cas de mort extramédullaire de cellules. Au chapitre prochain (II - B), nous présentons les résultats de mort intramédullaire. La précision des résultats obtenus est du même ordre de grandeur que celle qui a été observée ci-dessus, et la convergence est encore plus rapide.

D'autre part, ces cas pathologiques sont des cas où il n'y a pas de réutilisation du fer des cellules mortes. Ils ont été choisis à cause de l'existence d'une solution explicite du système intégral-différentiel, mais ce sont cependant des cas particuliers. On pourrait donc penser que l'application de ces méthodes d'identification est moins facile dans le cas tout à fait général. C'est pourquoi nous consacrons un exemple de la suite de ce chapitre, à un cas général simulé où le fer des cellules mortes est réutilisé (paragraphe II.A). Les résultats montrent que la précision est du même ordre de grandeur et la convergence reste aussi rapide que dans les exemples ci-dessus.

II - ETUDE DE LA PRECISION DES RESULTATS ET DE LA DUREE DE CALCULS :

La précision des résultats et la durée des calculs sont étroitement liées mais elles dépendent toutes deux de plusieurs facteurs :

- le choix de la méthode de résolution du système intégral-différentiel et des paramètres introduits (pas d'intégration...)
- le nombre de données ($x'_6(t_k)$)
- le nombre de paramètres ajustés
- le choix des valeurs initiales
- certains paramètres auxiliaires introduits au cours des calculs comme le facteur de pondération.

A - Influence du choix de la méthode de résolution du système intégral-différentiel

Au cours de la discussion des résultats des diverses méthodes de résolution du système intégral-différentiel, nous avons retenu au chapitre précédent (V : IV) les deux versions de la méthode à pas liés, implicite :

- . méthode à pas d'intégration constant sur tout l'intervalle
- . méthode avec modification du pas d'intégration au cours de la résolution.

Une question s'est posée : dans quelle mesure la qualité de la précision de la méthode de résolution du système intégral-différentiel accélère-t-elle la convergence de l'identification des paramètres ?

Aussi, en nous rapportant à la classification établie au chapitre V (IV), nous avons effectué l'identification des paramètres en utilisant :

- une méthode de bonne précision comprise entre 10^{-4} et 10^{-5}

- . la méthode à pas liés, implicite, à pas constant :

$$h = 0.02$$

- deux méthodes de précision moyenne (10^{-3} à 10^{-4})

- . la méthode à pas liés, implicite, à pas variable :

$$h_1 = 0.02 \quad \text{si} \quad t \leq 2$$

$$h_2 = 0.10 \quad \text{si} \quad t > 2$$

- . la méthode à pas liés, implicite, à pas constant :

$$h = 0.05.$$

Pour cette étude nous avons recherché la valeur des 3 paramètres caractérisant les cas de mort extramédullaire de cellules : u_2 , u_4 et u_5 .

Les données

Le cas retenu correspond à un cas général simulé où la réutilisation du fer des cellules mortes est prise en compte. Il est alors impossible de calculer de façon stricte la fonction $x_6(t)$, et nous devons avoir

recours à la résolution du système intégral-différentiel par méthode numérique pour calculer les valeurs $x'_6(t_k)$ qui seront les données de l'identification. Ces données ont été obtenues par la méthode la plus précise que nous avons étudiée : celle des pas liés, implicite, avec un pas d'intégration : $h = 0.01$.

Nous avons vu que les écarts relatifs moyens observés sur $x_6(t)$ étaient de l'ordre de 10^{-6} (p. 147) dans les cas de non réutilisation.

Les autres données : $f(\tau)$, $[B]$, k_i , ... sont reportées en annexe.

Les résultats :

apparaissent au tableau 2 (p. 158).

Les meilleurs résultats sont évidemment obtenus avec la méthode de résolution du système intégral-différentiel, la plus précise : ($h = 0.02$). Mais la durée des calculs s'élevant à 28 mn nous a paru excessive pour envisager avec cette valeur de h , une exploitation en routine.

Cependant, le tableau 2 montre qu'une précision très légèrement inférieure est obtenue en résolvant le système par la méthode à pas liés implicite, avec modification du pas d'intégration. Et la durée des calculs se trouve alors divisée par 2.6.

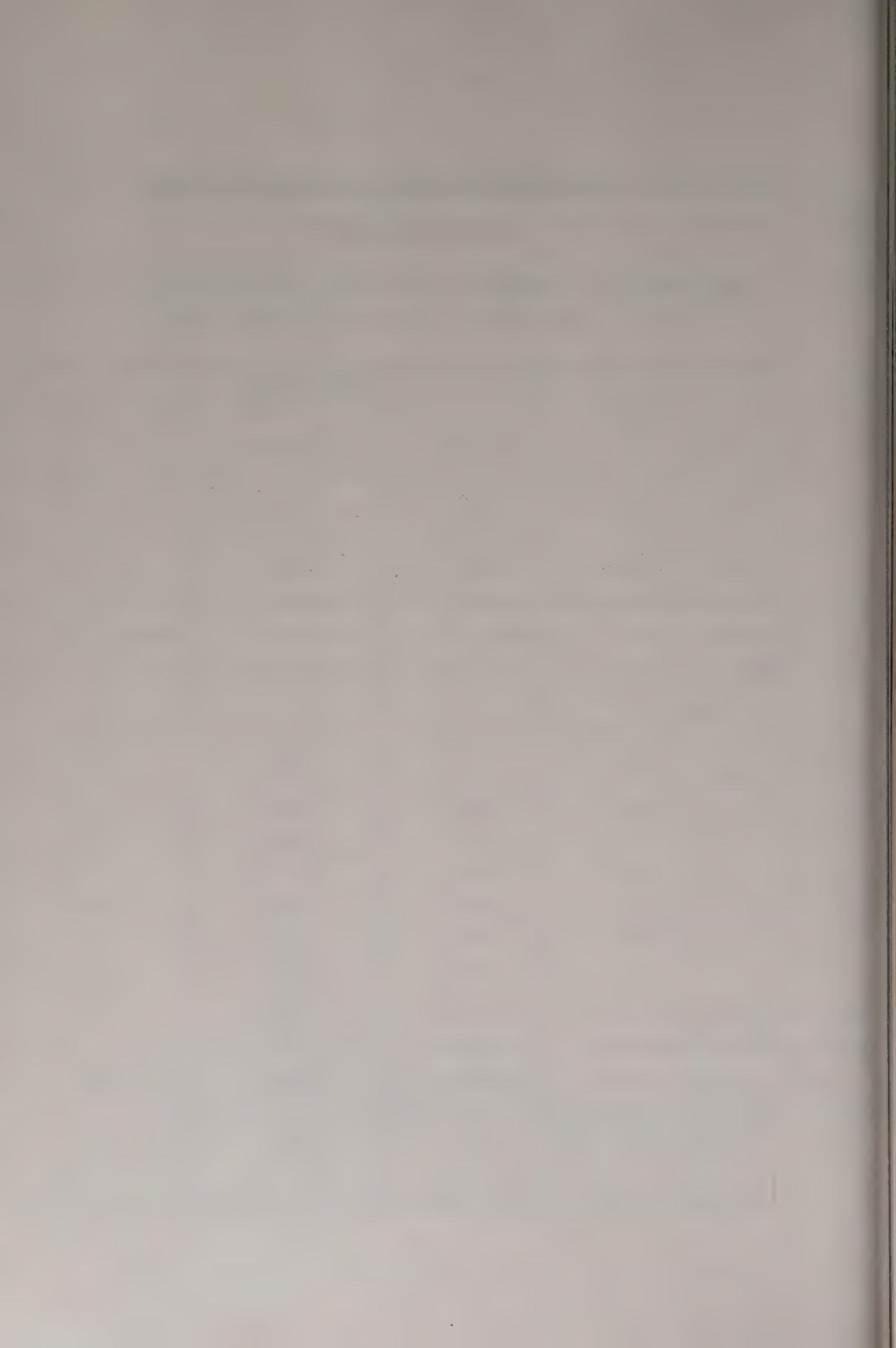
Les résultats de l'identification obtenus en utilisant la méthode de résolution à pas liés, implicite, avec un pas de 0.05 sont beaucoup moins bons, la durée des calculs étant plus élevée.

Ces résultats nous montrent que, parmi les méthodes testées pour résoudre le système intégral-différentiel, celle qui paraît la mieux adaptée à notre problème particulier d'identification est celle des pas liés, implicite, avec modification du pas d'intégration au cours de la résolution.

Tableau 2 : Influence de la méthode de résolution du système
intégral-différentiel

Identification de 3 paramètres : cas général simulé de mort extramédul-
laire (avec réutilisation du fer des cellules mortes)

	valeurs exactes	Pas liés impl. $h = 0.02$	Pas liés impl. $h_1 = 0.02$ $h_2 = 0.10$	Pas liés impl. $h = 0.05$
u_2	0.0200	0.0200	0.0196	0.0218
u_4	0.3000	0.2999	0.3024	0.2852
u_5	1.0000	1.0014	1.0015	0.8230
coût	0	0.16×10^{-8}	0.48×10^{-5}	0.20×10^{-3}
t (jours)	$x_6'(t)$ (données)	$x_6(t)$ (résultats)	$x_6(t)$ (résultats)	$x_6(t)$ (résultats)
0.5	0.0122	0.0122	0.0122	0.0122
1.0	0.0673	0.0673	0.0673	0.0668
2.0	0.2470	0.2470	0.2478	0.2380
3.0	0.3749	0.3748	0.3752	0.3675
4.0	0.4547	0.4547	0.4550	0.4507
5.0	0.4763	0.4764	0.4764	0.4792
7.0	0.4914	0.4915	0.4916	0.4970
10.0	0.4978	0.4978	0.4983	0.5008
15.0	0.4781	0.4781	0.4792	0.4779
20.00	0.4508	0.4508	0.4523	0.4481
Nombre d'itérations		4	6	6
Durée des calculs		28 mn	10.6 mn	14.7 mn



B - Influence des données

Au cours de l'identification, les données peuvent intervenir sur la convergence de la méthode ou sur la précision des résultats :

- par leur nombre
- par leur répartition
- par leur précision

Dans ce chapitre, où nous travaillons sur des données strictes obtenues par simulation, l'influence de la précision des données ne peut être testée, nous la vérifierons en comparant avec les cas réels (chapitre VII).

Nous avons étudié les deux premiers facteurs sur le cas de mort extramédullaire simulé présenté au 1er paragraphe (cas où l'on peut expliciter la solution du système intégral-différentiel).

L'identification effectuée est toujours celle des 3 paramètres : u_2 , u_4 et u_5

Dans les exemples présentés, nous avons utilisé successivement comme données :

1° - 8 points $x'_6(t_k)$ tels que : $1 \leq t_k \leq 13$:

$t_k = 1 ; 1.3 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10$ et 13 (jours)

2° - 9 points $x'_6(t_k)$ tels que : $1 \leq t_k \leq 20$:

$t_k = 1 ; 1.3 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 13$ et 20 (jours)

3° - 10 points $x'_6(t_k)$ tels que : $0.5 \leq t_k \leq 20$:

$t_k = 0.5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 10 ; 15$ et 20 (jours)

Pour la résolution du système, nous avons utilisé la méthode à pas liés, implicite, avec modification du pas :

$$h = 0.02 \quad \text{si} \quad t < 2$$

$$h = 0.10 \quad \text{si} \quad t \geq 2$$

Le tableau 3 (p. 161) montre que l'on peut obtenir, sur des cas théoriques, une précision des résultats du même ordre de grandeur dans les trois cas, mais l'influence de l'intervalle connu est très important sur la rapidité de la convergence :

En effet, la simple addition du point ($t = 20$) aux 8 premiers, divise par deux le nombre d'itérations nécessaires. Mais la durée des calculs bien que réduite n'est pas divisée par deux car chaque résolution du système intégral doit être faite sur un intervalle plus important : 20 jours au lieu de 13 jours, (voir p. 161).

Remarques :

C'est la 1ère répartition où le dernier point connu se situe à 13 jours qui correspond généralement aux données expérimentales, et il paraît difficile aux médecins de nous fournir ce point supplémentaire, extérieur à l'intervalle $[0 ; 13 \text{ jours}]$ qui accélère la convergence.

D'autre part, si la densité des points paraît peu importante en comparant la précision des résultats des deux dernières répartitions, n'oublions pas que, dans ce chapitre, nous partons de valeurs exactes des $x'_6(t_k)$. Lorsqu'il s'agit de données réelles entachées d'erreurs expérimentales, il est évident que le nombre des points joue un plus grand rôle.

C - Influence du nombre des paramètres identifiés

Reprenons l'exemple "8 points" ci-dessus et identifions successivement :

- un paramètre : u_4
- deux paramètres : u_2 et u_4
- trois paramètres : u_2 , u_4 et u_5 .

Tableau 3 Influence du nombre et de la répartition des données

Identification de 3 paramètres : cas simulé de mort extramédullaire
(sans réutilisation du fer des cellules mortes).

	8 points $x'_6(t_k)$ $1 \leq t_k \leq 13$	9 points $x'_6(t_k)$ $1 \leq t_k \leq 20$	10 points $x'_6(t_k)$ $0.5 \leq t_k \leq 20$	valeurs exactes
valeurs initiales	$u_2 = 0.010$ $u_4 = 0.100$ $u_5 = 3.000$	$u_2 = 0.010$ $u_4 = 0.100$ $u_5 = 3.000$	$u_2 = 0.010$ $u_4 = 0.100$ $u_5 = 3.000$	$u_2 = 0.020$ $u_4 = 0.200$ $u_5 = 1.500$
IT = 1	$u_2 = 0.000$ $u_4 = 0.223$ $u_5 = 3.000$	$u_2 = 0.000$ $u_4 = 0.377$ $u_5 = 3.000$	$u_2 = 0.000$ $u_4 = 0.343$ $u_5 = 3.000$	
IT = 2	$u_2 = 0.008$ $u_4 = 0.282$ $u_5 = 3.000$	$u_2 = 0.008$ $u_4 = 0.284$ $u_5 = 1.928$	$u_2 = 0.007$ $u_4 = 0.310$ $u_5 = 1.869$	
IT = 3	$u_2 = 0.000$ $u_4 = 0.325$ $u_5 = 2.636$	$u_2 = 0.020$ $u_4 = 0.194$ $u_5 = 1.470$	$u_2 = 0.020$ $u_4 = 0.196$ $u_5 = 1.559$	
IT = 4	$u_2 = 0.006$ $u_4 = 0.286$ $u_5 = 2.305$	$u_2 = 0.020$ $u_4 = 0.198$ $u_5 = 1.514$	$u_2 = 0.020$ $u_4 = 0.200$ $u_5 = 1.499$	
IT = 8	$u_2 = 0.020$ $u_4 = 0.200$ $u_5 = 1.513$			
Durée des calculs	9.80 mn	6.70 mn	6.80 mn	

Les paramètres non ajustés ont leur valeur exacte pendant l'exécution du programme. La comparaison des résultats de l'identification de 1, 2 et 3 paramètres montre que la durée des calculs augmente très rapidement avec le nombre de paramètres inconnus (voir tableau 4 de la page suivante).

- La convergence est moins rapide :

1 itération est suffisante pour l'identification de 1 paramètre (0.50 mn)

3 itérations sont nécessaires pour identifier 2 paramètres (2.30 mn)

8 itérations sont nécessaires pour identifier 3 paramètres (9.80 mn).

- La durée de chaque itération croît très vite avec le nombre, n , de paramètres puisque chacune nécessite $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ résolutions du intégrro-différentiel (chapitre II).

Ici aussi, la précision des résultats finaux demeure du même ordre de grandeur dans les trois cas.

Remarque : La nature même des paramètres intervient, elle aussi. Nous pouvons, en effet, remarquer sur tous nos exemples que u_5 est le paramètre qui converge le moins rapidement et qu'il est obtenu avec une moins bonne précision que les autres inconnues u_i .

Un problème se pose : dans quelle mesure un manque de précision de u_5 se répercute-t-il sur les résultats obtenus pour les autres paramètres ajustés ?

Nous tenterons de répondre à ce problème au cours du chapitre VII.

D - Influence des données initiales des paramètres identifiés

L'influence de ces données initiales sur la convergence des résultats dépend essentiellement de la nature des paramètres.

1890

1890

1890

1890

1890

1890

1890

1890

1890

Tableau 4 : Influence du nombre de paramètres identifiés

Cas simulé de mort extramédullaire - ($h_1 = 0.02$; $h_2 = 0.10$; $t_c = 2$)

	3 paramètres ajustés	2 paramètres ajustés	1 paramètre ajusté	valeurs exactes
valeurs initiales	$u_2 = 0.010$ $u_4 = 0.100$ $u_5 = 3.000$	$u_2 = 0.010$ $u_4 = 0.100$ $u_5 = 1.500^*$	$u_2 = 0.020^*$ $u_4 = 0.100$ $u_5 = 1.500^*$	$u_2 = 0.020$ $u_4 = 0.200$ $u_5 = 1.500$
IT = 1	$u_2 = 0.000$ $u_4 = 0.223$ $u_5 = 3.000$	$u_2 = 0.000$ $u_4 = 0.220$ $u_5 = 1.500^*$	$u_2 = 0.020^*$ $u_4 = 0.199$ $u_5 = 1.500^*$	
IT = 2	$u_2 = 0.008$ $u_4 = 0.282$ $u_5 = 3.000$	$u_2 = 0.010$ $u_4 = 0.250$ $u_5 = 1.500^*$		
IT = 3	$u_2 = 0.000$ $u_4 = 0.325$ $u_5 = 2.636$	$u_2 = 0.019$ $u_4 = 0.202$ $u_5 = 1.500^*$		
IT = 4	$u_2 = 0.006$ $u_4 = 0.286$ $u_5 = 2.305$	$u_2 = 0.020$ $u_4 = 0.199$ $u_5 = 1.500^*$		
IT = 5	$u_2 = 0.020$ $u_4 = 0.200$ $u_5 = 1.513$			
Durée des calculs	9.80 mn	2.90 mn (IT=4) 2.30 mn (IT=3)	0.50 mn	

* paramètre non ajusté.

En effet, au cours de l'ajustement de u_1 , u_2 , u_3 et u_4 nous n'avons jamais rencontré de difficultés à ce sujet. La recherche de u_5 est plus délicate.

Rappelons que le domaine permis pour les 4 premiers paramètres est relativement restreint, puisque leur définition entraîne :

$$0 \leq u_i \leq 1 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \text{ et } 4$$

Chacun représente en effet le rapport du nombre de cellules ou de globules qui meurent à un "âge" donné au nombre total de cellules ou de globules de cet "âge" alors présents dans la moelle ou dans le sang circulant.

1er Exemple : Identification de u_4

Les essais ont été effectués sur l'exemple de mort extramédullaire (9 points) cité ci-dessus.

	Valeur initiale	Itération n° 1	Itération n°2	Valeur exacte
u_4	<u>0.0000</u>	<u>0.1988</u>	<u>0.1988</u>	<u>0.2000</u>
coût	0.133	0.37×10^{-6}	0.36×10^{-6}	0
u_4	<u>0.1000</u>	<u>0.1988</u>	<u>0.1988</u>	<u>0.2000</u>
coût	0.033	0.36×10^{-6}	0.36×10^{-6}	0
u_4	<u>0.5000</u>	<u>0.1988</u>	<u>0.1988</u>	<u>0.2000</u>
coût	0.304	0.36×10^{-6}	0.36×10^{-6}	0
u_4	<u>0.9000</u>	<u>0.1988</u>	<u>0.1988</u>	<u>0.2000</u>
coût	1.650	0.36×10^{-6}	0.36×10^{-6}	0
u_4	<u>1.0000</u>	<u>0.1988</u>	<u>0.1988</u>	<u>0.2000</u>
coût	2.155	0.36×10^{-6}	0.36×10^{-6}	0

Les résultats sont donc indépendants des données initiales
et la durée des calculs reste identique dans chaque cas (0.50 mn pour une itération).

La convergence est aussi rapide pour u_1 , u_2 et u_3 , nous ne nous y attarderons pas. u_5 étant plus difficile à déterminer, nous lui consacrons notre deuxième exemple.

2ème exemple : Identification de u_5

Les données de l'exemple précédent sont conservées, à l'exception naturellement des valeurs initiales de u_5 et de u_4 . Ce dernier paramètre prend la valeur exacte pendant toute l'identification ($u_4 = 0.200$).

	Valeur initiale	Itération n°1	Itération n° 2	Itération n° 3	Itération n° 4
u_5 coût	0.200 0.12×10^{-1}	0.894 0.28×10^{-2}	1.137 0.11×10^{-2}	1.523* 0.40×10^{-4}	1.495 0.48×10^{-5}
u_5 coût	0.750 0.43×10^{-2}	1.122 0.12×10^{-2}	1.894 0.11×10^{-2}	1.510 0.20×10^{-5}	1.492 0.47×10^{-5}
u_5 coût	1.000 0.19×10^{-2}	1.538 0.11×10^{-5}	1.509 0.47×10^{-5}		
u_5 coût	2.000 0.17×10^{-2}	1.496 0.47×10^{-5}	1.511* 0.20×10^{-5}		
u_5 coût	3.000 0.14×10^{-1}	0.247 0.11×10^{-1}	0.200** 0.12×10^{-1}		(valeur exacte : $u_5 = 1.500$)

* résultat obtenu après bipartition

** arrêt du programme : non amélioration du résultat au bout du nombre maximum permis de bipartitions, (K2M = 4).

Nous constatons que la convergence des résultats est beaucoup moins rapide que celle de l'exemple précédent.

D'autre part, pour la valeur initiale :

$$u_5 = 3.000$$

les résultats ne convergent pas vers la valeur exacte : le mode de "rattrapage" par bipartition se montre inefficace dans cet exemple où il semble qu'il y ait un minimum local de la fonction "coût".

Ces ennuis propres à u_5 s'expliquent par le fait que ce dernier a une influence moins importante que celle de u_1 , u_2 , u_3 et u_4 sur la fonction $x_6(t)$, base de l'identification. En effet, les valeurs initiales de u_5 correspondent à des coûts de l'ordre du dixième ou du centième des valeurs obtenues avec les valeurs initiales de u_4 dans le 1er exemple :

$$(u_5)_{\text{init}} = 0.750 (= \text{valeur exacte}/2) \longrightarrow \text{coût} = 0.43 \times 10^{-2}$$

$$(u_4)_{\text{init}} = 0.100 (= \text{valeur exacte}/2) \longrightarrow \text{coût} = 0.33 \times 10^{-1}$$

Cependant, nous avons constaté que l'influence de u_5 sur la fonction $x_6(t)$ était plus importante sur l'intervalle :

$$2 \leq t \leq 4$$

Aussi, avons nous amélioré nos résultats par l'intermédiaire de la pondération dont l'étude est précisée au paragraphe suivant.

Nous pouvons ainsi rendre la méthode d'identification plus efficace et obtenir par exemple des résultats qui convergent à partir de la valeur initiale $u_5 = 3$ jours, ce que nous n'avions pu réaliser sans pondération.

Toutefois, craignant d'obtenir des résultats peu précis pour l'identification de ce paramètre, nous avons voulu savoir dans quelle mesure une différence de u_5 modifiait les valeurs trouvées pour les autres paramètres ajustés : une étude spéciale est effectuée au chapitre VII.

E - Influence de la pondération

Nous venons d'évoquer son utilité au cours de l'identification de u_5 . Mais des essais ont été effectués dans le cas plus général de la recherche des trois paramètres caractéristiques de la mort extramédullaire (exemple choisi en B).

Rappelons la forme de la fonction coût :

$$F(U) = \sum_k p_k (x_6(t_k) - Mes_k)^2$$

$x_6(t_k)$ et Mes_k étant respectivement la valeur calculée et la donnée de l'ajustement au point t_k

p_k : étant un facteur de pondération.

Dans tous les exemples précédents nous avons :

$$p_k = 1 \quad \forall k$$

Augmentons l'importance de la contribution de certains points t_k dans la fonction coût $F(U)$ en associant à ces points un facteur p_k supérieur à 1.

1er Exemple : Identification de u_5 (valeur initiale : 3 jours)

Nous avons vu que sans pondération, sur cet exemple, notre méthode s'était révélée insuffisante et que, d'autre part, l'influence de u_5 était particulièrement sensible sur l'intervalle de t : [2, 4 jours] .

Aussi reprenons-nous l'exemple précédent avec des facteurs de pondération :

$$p_{2j} = p_{3j} = p_{4j} = 2$$

Les autres valeurs de p_k restant égales à 1 :

	Valeur initiale	Itération n° 1	Itération n° 2	Itération n° 3	Valeur exacte
<u>Avec pondération :</u>					
u_5	3.000	1.600	1.522	1.518	1.500
coût	0.22×10^{-1}	0.10×10^{-3}	0.27×10^{-6}	0.27×10^{-6}	0
<u>Sans pondération :</u>					
u_5	3.000	0.247	0.200	Arrêt (4 bipar- titions)	1.500
coût	0.13×10^{-1}	0.11×10^{-1}	0.12×10^{-1}		0

La pondération permet ainsi la convergence des résultats vers la solution exacte qui n'avait pu être obtenue sans son intermédiaire.

2ème exemple :

Reprenons l'exemple d'identification de 3 paramètres de mort extramédullaire précédent (A et B) où les données étaient les valeurs de $x_6^1(t)$ aux 8 points suivants :

$t = 1 \quad ; \quad 1.3 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad 4 \quad ; \quad 6 \quad ; \quad 8 \quad ; \quad 10 \text{ et } 13 \text{ jours}$

Ayant constaté en (B) que la convergence était accélérée par la prise en compte d'un point supplémentaire ($t = 20$ jours), extérieur à l'intervalle initial, nous avons cherché à remplacer l'influence de ce point supplémentaire par la pondération du dernier point donné ($t = 13$ jours) :

$$p_{(13 \text{ jours})} = 4$$

en conservant pour les autres points :

$$p_k = 1$$

Avec cette pondération nous obtenons les résultats suivants :

	u_2	u_4	u_5	coût
valeur initiale	0.010	0.100	3.000	0.161
Itération 1	0.000	0.192	3.000	0.142
Itération 2	0.005	0.306	3.000	0.10×10^{-1}
Itération 3	0.003	0.310	1.458	0.65×10^{-2}
Itération 4	0.019	0.207	1.471	0.69×10^{-3}
valeur exacte	0.020	0.200	1.500	0

Sans pondération, les 4 première itérations correspondaient aux résultats :

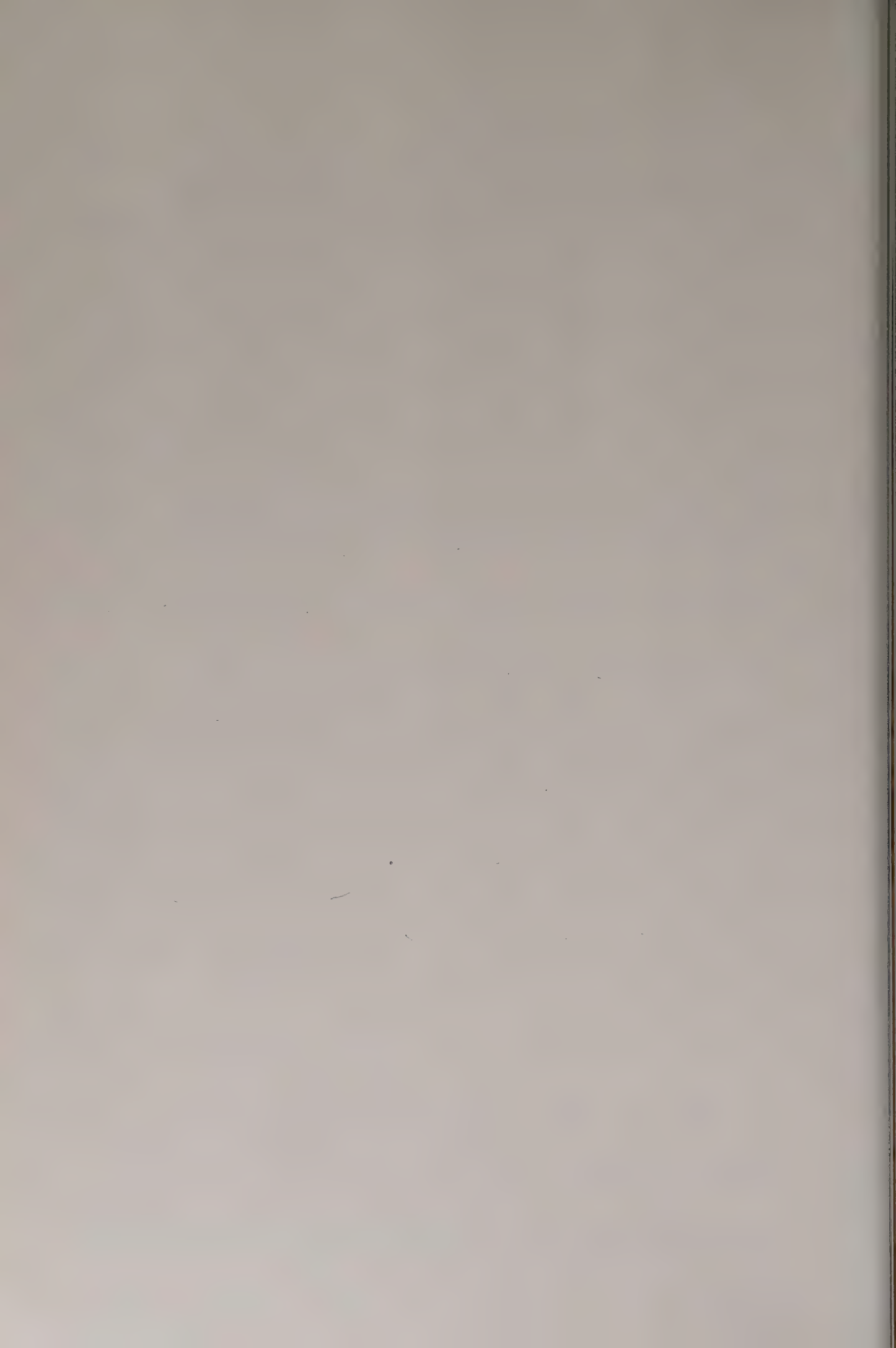
	u_2	u_4	u_5	coût
valeur initiale	0.010	0.100	3.000	0.89×10^{-1}
Itération 1	0.000	0.223	3.000	0.47×10^{-1}
Itération 2	0.008	0.282	3.000	0.91×10^{-2}
Itération 3	0.000	0.325	2.636	0.57×10^{-2}
Itération 4	0.006	0.286	2.305	0.24×10^{-2}
valeur exacte	0.010	0.200	1.500	0

Ces résultats montrent que la pondération accélère la convergence.

En effet, dans le cas de l'exemple présenté, une précision analogue des résultats avait nécessité 8 itérations (voir tableau 3 page 161).

La durée des calculs se trouve donc réduite et passe de 9.80 mn à 4.45 mn.

Rappelons que la durée des itérations varie au cours de l'exécution du programme en fonction des systèmes de bipartitions, sorties de la



solution du domaine acceptable, ... C'est pourquoi, le temps-machine de l'identification avec pondération est inférieur à la moitié du temps précédemment observé en dépit des calculs communs d'initialisation.

DISCUSSION :

La pondération semble donc très efficace, mais n'oublions pas que nous travaillons, dans ce chapitre, sur des données "théoriques préfabriquées". L'application à des cas réels est beaucoup plus délicate : il est dangereux de pondérer fortement un seul point, qui peut être soumis à des erreurs expérimentales. Par contre, il peut être intéressant d'utiliser une pondération faible ou moyenne sur plusieurs points expérimentaux correspondant à une partie de la courbe qui caractérise le type d'anomalie du malade traité.

F - Influences secondaires

Certaines grandeurs auxiliaires introduites au cours des calculs peuvent avoir également une influence sur la précision des résultats ou sur la convergence de la méthode.

Citons les constantes intervenant dans les tests d'arrêt :

- nombre maximum d'itérations
- constantes caractérisant la stationnarité des résultats au cours des itérations successives (voir chapitre II)
- nombre maximum de corrections par bipartitions en cas de non amélioration des résultats.

D'autre part, les écarts du 1^{er} des points du support de l'interpolation de la fonction coût par le polynôme $P(U)$ ont également une influence sur la convergence de la méthode. (Il s'agit des grandeurs h_1 du chapitre II : p. 18).

Nous avons utilisé des distances proportionnelles aux variables elles-mêmes :

$$du_i = r_i u_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} du_i = \xi_i \\ \text{si } u_i = 0 \end{cases}$$

où : $r_i = 0.01$ pour $i = 1, 2, 3$ et 4
 $r_i = 0.10$ pour $i = 5$

Les quatre premières valeurs ont une influence relativement faible sur la rapidité de la convergence.

Mais r_5 ne doit pas avoir une valeur trop faible. En effet, l'influence de u_5 sur la fonction de base $x_6(t)$ de l'identification et par conséquent sur la fonction coût, est moins importante que celle des autres inconnues. Et, une trop faible valeur de r_i associée à une faible valeur de u_i peut conduire à des résultats identiques de la fonction coût sur les points du support de l'axe correspondant à cette variable u_i qui reste constante pendant toute l'identification : c'est ce que nous avons observé pour u_5 en prenant $r_5 = 0.01$.

Comme mesure de sécurité du programme, nous avons prévu à cet égard, une limite inférieure de ces distances :

$$du_i \geq 0.01 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \text{ et } 4$$

$$du_5 \geq h$$

h : étant le pas de calcul de la méthode de résolution du système intégré-différentiel. u_5 est en effet, supposé égal à un multiple de cette valeur (chapitre III : II A 2).

III - INTERPRETATION DES RESULTATS DE L'IDENTIFICATION DANS DES CAS SIMULES

L'étude que nous venons de faire en appliquant la méthode d'identification présentée à des cas pathologiques simulés nous a permis de

vérifier les résultats.

Nous avons pu, en outre, comparer les méthodes et les variables auxiliaires introduites et choisir les plus adaptées pour l'exploitation de données réelles expérimentales.

C'est ainsi, que pour résoudre le système intégral-différentiel, nous avons retenu :

la méthode à pas liés, implicite avec modification du pas d'intégration :

$$\begin{aligned} h_1 &= 0.02 & t < t_c \\ h_2 &= 0.10 & t \geq t_c \end{aligned} \quad \text{où } t_c \geq 2 \text{ jours}$$

Un ordre de grandeur de la durée des calculs pour une exploitation normale, a été ainsi obtenu :

- . identification de 3 paramètres : 10 mn
temps pouvant être réduit à 7 mn par l'addition d'une donnée $x'_6(t_k)$ supplémentaire
- . identification de 2 paramètres : 3 à 4 mn
- . identification de 1 paramètre : 1 mn.

La durée des calculs peut être également abaissée après une première exploitation en semi-routine, par une meilleure adaptation des données initiales et par une pondération caractéristique du type de l'anomalie envisagée.

D'autre part, cette étude nous a permis de soulever le problème de l'influence de u_5 , paramètre le plus difficile à ajuster avec précision, sur les résultats obtenus pour les autres inconnues u_i . Cette influence sera étudiée au cours du prochain chapitre.

Enfin, nous avons constaté que des résultats ont été obtenus avec une excellente précision à partir de données ayant des valeurs strictes, mais en nombre égal à celui des mesures réelles.

L'application de cette méthode à des cas réels est exposée au chapitre suivant.

L'étude des cas simulés n'est en effet qu'une étape qui paraît cependant très utile, voire même indispensable, pour entreprendre une exploitation en routine sur des cas pathologiques.

CHAPITRE VII

APPLICATIONS DE L'IDENTIFICATION DES PARAMETRES

DU MODELE A DES EXPLORATIONS MEDICALES

Introduction

Au cours des chapitres précédents, nous avons exposé une méthode d'identification des paramètres d'un système intégral-différentiel.

Pour contrôler la validité et la précision des résultats obtenus, nous avons testé cette méthode sur des cas pathologiques préalablement simulés de façon à pouvoir nous référer aux valeurs connues à priori des paramètres.

Que donne l'application de cette technique à des cas réels ?

C'est un problème médical important car le système intégral-différentiel correspond, comme nous l'avons dit, au modèle de la cinétique du Fer* dans les cas d'érythropoïèse normale et pathologique. A partir de ce modèle et avec les résultats d'explorations isotopiques (cinétique du fer marqué, de l'hémoglobine marquée, d'autoradiographies médullaires), les médecins désirent l'estimation du pourcentage de destruction de cellules médullaires et d'hématies ainsi que celle de l'"âge" moyen correspondant à cette destruction.

Dans la première partie, nous donnons deux exemples d'identification de paramètres à partir de données réelles de cas pathologiques différents :

- . pour l'un, il y a destruction précoce de globules dans le sang circulant ("mort extramédullaire"),
- . chez le second, ce sont des cellules en cours de maturation dans la moelle qui meurent ("mort intramédullaire").

La seconde partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des résultats de l'identification qui sont soumis à l'influence de plusieurs facteurs tels que :

- la "qualité" des valeurs imposées comme données dans le calcul
- l'influence réciproque des paramètres recherchés, les uns sur

les autres, au cours de l'identification.

C'est ainsi, qu'au chapitre précédent nous avons soulevé un problème :

l'un des paramètres est plus délicat à déterminer que les autres ; il s'agit de la durée moyenne, u_5 , du séjour dans le sang circulant des globules qui meurent prématurément lorsque le phénomène est lié à l'"âge" des cellules :

dans quelle mesure une erreur d'appréciation de cette inconnue modifie-t-elle les résultats pour les autres paramètres identifiés ?

Remarquons également que le même problème se pose vis à vis des paramètres que nous supposons connus (τ_A , θ , k_i ...) : une imprécision de leur valeur se répercute-t-elle de façon sensible sur les résultats de l'identification ?

Aussi étudions nous successivement en exemples :

- l'influence du paramètre inconnu, u_5 , instant moyen de la destruction de certains globules,
- l'influence de deux paramètres supposés, jusqu'à présent, connus dans notre problème :
- . τ_A : instant moyen de la destruction de cellules en cours de maturation dans la moelle,
- . θ : durée du cycle de maturation.

I - IDENTIFICATION DE PARAMETRES A PARTIR DES DONNEES REELLES

Appliquons notre programme d'identification aux résultats expérimentaux obtenus pour deux malades différents, présentant respectivement :

- une anomalie extramédullaire (destruction prématurée de globules)
- une anomalie intramédullaire (mort de certaines cellules en cours de maturation).

Dans ces deux exemples, le Fer^* contenu dans les cellules mortes est réutilisé conformément au modèle adopté (page 10).

A - 1er exemple : destruction prématurée de globules dans le sang

A partir des données de la fonction d'incorporation globulaire $x_6(t)$, aux 8 instants :

$t = 22 \text{ h} ; 32 \text{ h} ; 2 \text{ j} ; 4 \text{ j} ; 6 \text{ j} ; 8 \text{ j} ; 10 ; \text{ et } 13 \text{ j}.$

Identifions les 3 paramètres caractéristiques de la mort extramédullaire :

u_2 : rapport du nombre de globules détruits, par jour, indépendamment de leur "âge", au nombre total de globules présents dans le sang circulant à cet instant.

u_4 : fraction du nombre des globules qui meurent au bout d'un temps u_5 compté à partir de leur sortie de la moelle.

u_5 : durée définie ci-dessus, du séjour moyen dans le sang circulant et concernant les globules dont la mort dépend de l'"âge".

La convergence des résultats est assez rapide et comparable à celle qui a été observée sur un cas simulé avec le même nombre de données (tableau page suivante).



Itération	u_2	u_4	u_5	coût
0	0.0200	0.200	1.000	0.259×10^{-1}
1	0.0000	0.378	1.000	0.133×10^{-1}
2	0.0006	0.373	0.520	0.694×10^{-2}
3	0.0048	0.365	0.423	0.598×10^{-2}
4	0.0047	0.364	0.389	0.579×10^{-2}
6	0.0047	0.356	0.355	0.563×10^{-2}
7	0.0047	0.356	0.355	0.563×10^{-2}

Les écarts entre la fonction $X_6(t)$ calculée d'après les résultats de l'identification et la fonction expérimentale varient en fonction du point t_k considéré (tableau ci-dessous) :

t	$x_6(t)$ données exp.	$X_6(t)$ résultats
22 h	0.040	0.042
32 h	0.060	0.091
2 j	0.170	0.176
4 j	0.365	0.406
6 j	0.500	0.480
8 j	0.560	0.520
10 j	0.550	0.542
13 j	0.530	0.558

Ces écarts en valeur absolue sont donc compris entre 0.002 et 0.040, ce qui correspond à une précision moyenne de 10^{-1} . La courbe (VII 1) de la page 178 permet de mieux apprécier ces différences.

Les résultats sont évidemment moins bons que ceux qui ont été obtenus au chapitre précédent, d'après les données strictes simulées.

Mais n'oublions pas que nous identifions 3 paramètres à partir de 8 points de mesure seulement. De plus ces derniers sont répartis sur



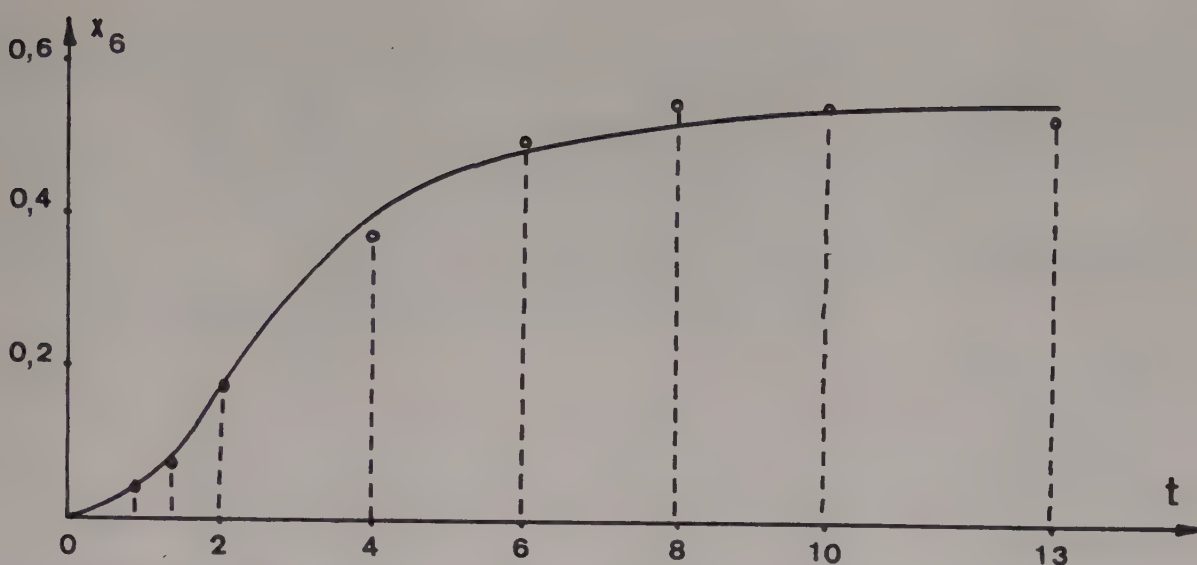


Fig.VII.1 : Mort extramédullaire (données réelles)

Ajustement de U_2 , U_4 & U_5

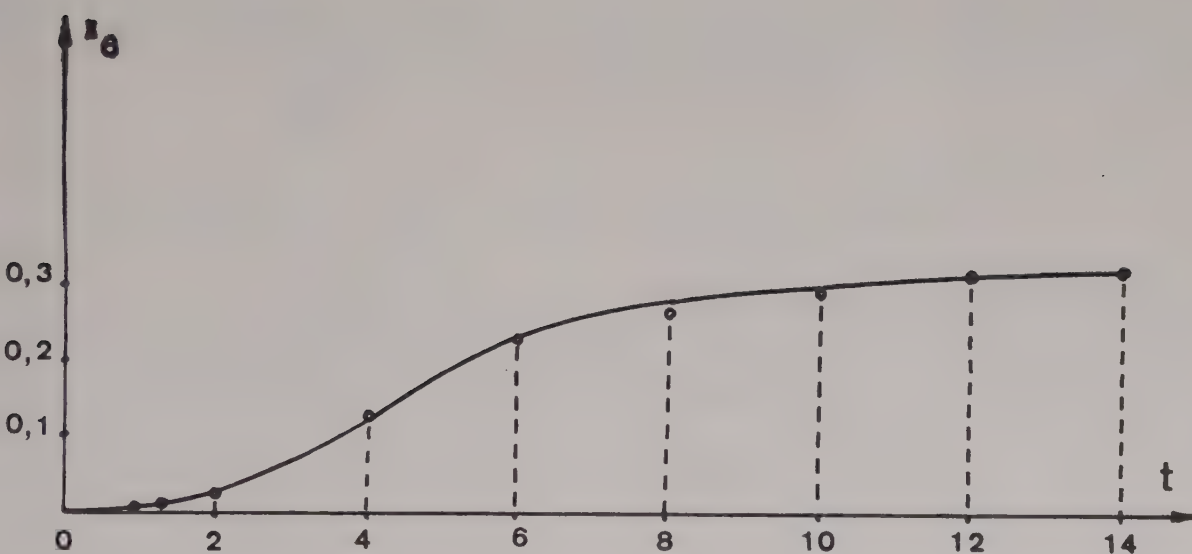
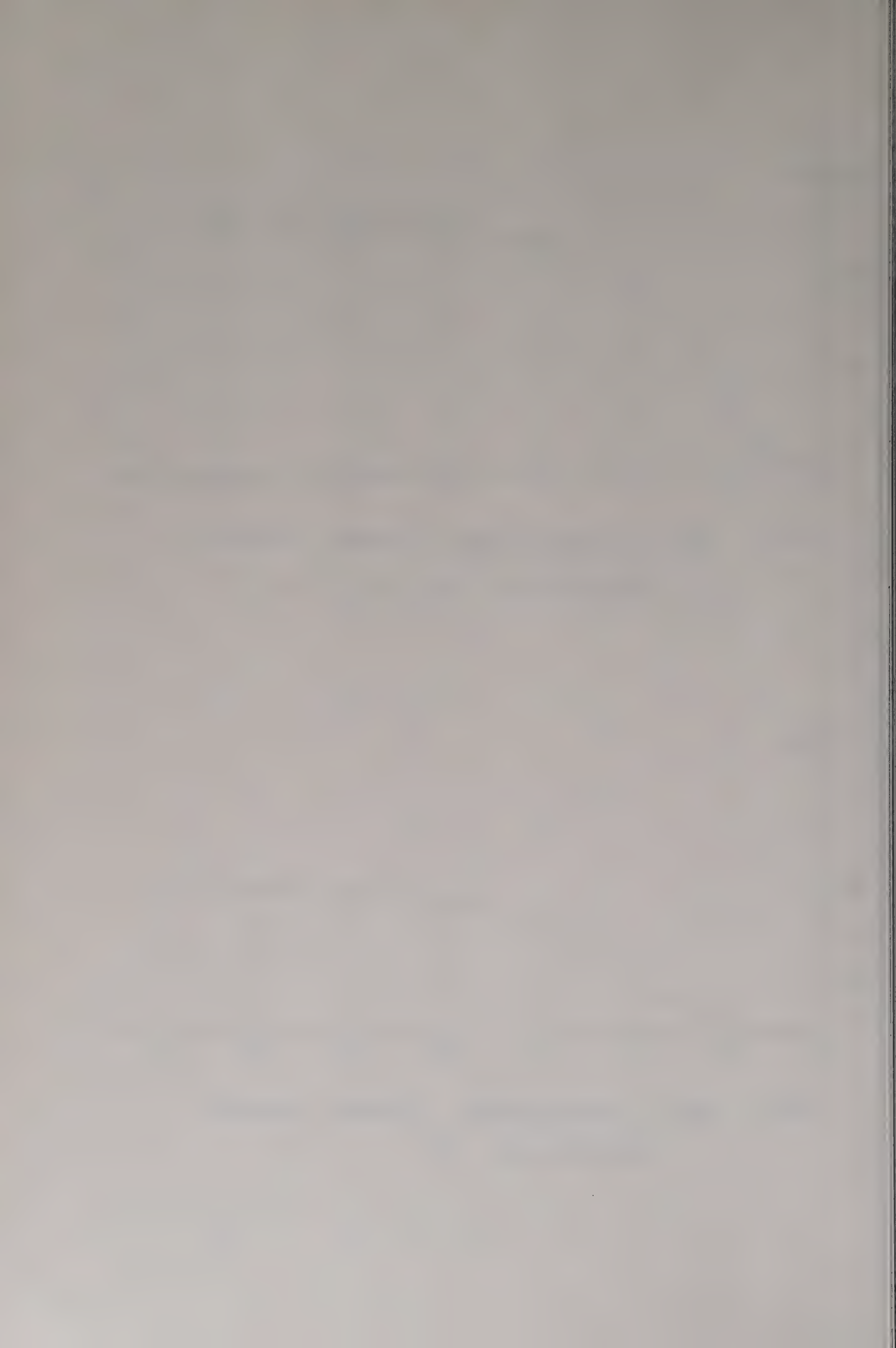


Fig.VII.2 : Mort intramédullaire (données réelles)

Ajustement de U_1



l'intervalle de temps [0 ; 13 jours] . Or, ce type d'anomalie a une influence essentielle sur la fin de la courbe $X_6(t)$: c'est-à-dire presque uniquement sur l'intervalle ($t \geq 4$ jours) (réf. 15).

D'autre part les mesures font appel aux techniques de comptages radioactifs dans des conditions délicates.

Enfin, outre les erreurs expérimentales qui peuvent entâcher les données $x_6(t_k)$, le modèle proposé ne représente lui-même qu'une approximation d'un phénomène physiologique complexe où les autres paramètres tels que les coefficients de transfert k_j qui interviennent dans la matrice [B] du système intégral-différentiel n'ont également que des valeurs approchées (Annexe).

Dans ces conditions, les résultats de ce calcul ne peuvent avoir une précision comparable à celle que nous avons constatée sur les cas simulés.

Remarque : L'utilisation de la pondération n'a pas amélioré les résultats.

Rappelons la forme de la fonction coût que nous cherchons à minimiser :

$$F(U) = \sum_k p_k (X_6(t_k) - x_6(t_k))^2$$

$x_6(t_k)$ étant la donnée expérimentale correspondant à l'instant t_k de mesure.

Nous avons essayé successivement :

. la pondération du dernier point :

$$p_{(13j)} = 4 \quad (\text{autres valeurs : } p_k = 1)$$

. la pondération des 3 derniers points :

$$p_{(8j)} = p_{(10j)} = p_{(13j)} = 2 \quad (\text{autres valeurs : } p_k = 1)$$

. la pondération des points intermédiaires comme au cours du chapitre précédent (p. 167) :

$$p_{4j} = p_{6j} = p_{8j} = 2 \quad (\text{autres valeurs : } p_k = 1).$$

Peut-on généraliser et la pondération est-elle inefficace dans notre problème particulier ? Seule la phase initiale de l'exploitation en "semi-routine" pourra nous dire si l'on doit essayer systématiquement de pondérer la participation de certains points, caractéristiques d'une anomalie particulière. La pondération peut également servir de moyen de dépannage en cas d'ennuis mathématiques tels que l'existence d'un minimum local de la fonction coût ...

B - 2ème exemple : mort de cellules intramédullaires

Il s'agit d'identifier cette fois-ci, le paramètre u_1 , représentant la proportion de cellules médullaires qui meurent.

Nous avons supposé que l'instant même de cette destruction, τ_A , coïncidait avec l'un des changements de classe cellulaire c'est-à-dire avec l'une des discontinuités de la fonction $f(\tau)$ introduite dans notre formulation (chapitre II).

Les données de la fonction d'incorporation globulaire, pour le malade étudié, sont fournies aux temps de mesure :

$$t = 23 \text{ h} ; 30 \text{ h} ; 2 \text{ j} ; 4 \text{ j} ; 8 \text{ j} ; 10 \text{ j} ; 12 \text{ j} \text{ et } 14 \text{ j}.$$

La convergence des résultats est plus rapide que dans l'exemple précédent :

	Valeur init.	IT = 1	IT = 2	IT = 3	IT = 4
u_1	0.200	0.530	0.458	0.453	0.453
coût	0.0503	0.0068	0.0013	0.0012	0.0012

Nous avons relevé les valeurs prises par la fonction d'incorporation globulaire, $X_6(t)$, calculée d'après les résultats de l'identification, aux points de mesure, t_i :

t	$x_6(t)$ (données exp.)	$X_6(t)$ (résultats)
23 h	0.005	0.006
30 h	0.010	0.011
2 j	0.025	0.029
4 j	0.135	0.122
8 j	0.260	0.280
10 j	0.290	0.302
12 j	0.320	0.315
14 j	0.345	0.323

L'ensemble des autres données ([B] ...) est reporté en Annexe. Précisons cependant que ces résultats correspondent à :

- une valeur de la durée du cycle médullaire : $\theta = 7.08$ jours
- un "âge" moyen de mort des cellules médullaires : $\tau_A = 5.58$ jours.

Nous constatons que les résultats sont un peu plus précis que ceux de l'exemple précédent. Mais, pour cette anomalie pathologique, nous ne recherchons qu'un seul paramètre alors que le cas précédent correspondait à 3 inconnues.

L'écart relatif moyen par rapport aux données est de 10 % (8 % si l'on ne tient pas compte du premier point où la valeur de la fonction ajustée $X_6(t)$ est extrêmement faible). Ces écarts sont mis en évidence sur la figure (VII. 2) de la page 178.

II - INFLUENCE DE DIVERS PARAMETRES SUR LES RESULTATS DE L'IDENTIFICATION

Au cours de l'identification de paramètres, nous avons observé que :

- pour la mort extramédullaire, l'"âge" moyen de destruction, u_5 , était parfois difficile à identifier, la convergence étant moins rapide et moins nette que pour les autres paramètres

- dans le cas de la mort intramédullaire, nous supposons connus les deux paramètres τ_A et θ représentant respectivement le moment de la destruction et la durée du cycle médullaire. Or, ces deux paramètres ne sont pas donnés expérimentalement de façon très précise dans tous les cas.

Un problème se pose donc :

Une imprécision de l'un des paramètres (u_5 , τ_A ou θ dans nos exemples) trouble-t-elle la valeur des résultats de l'identification des autres paramètres (pourcentages de destruction ...) ?

Pour étudier l'influence de chacun de ces paramètres, nous lui affectons une série de valeurs différentes et pour chacune d'entre elles nous effectuons l'identification des autres paramètres. Nous comparons ensuite l'ensemble des résultats obtenus tout en observant les déformations éventuelles de la fonction d'incorporation globulaire $X_6(t)$ correspondante, base de cette identification.

Envisageons successivement les deux anomalies pathologiques essentielles :

- la destruction précoce de globules dans le sang circulant où nous étudions l'influence de u_5 (paramètre inconnu)
- la mort de cellules en cours de maturation dans la moelle où nous recherchons l'influence de τ_A et θ (paramètres supposés connus).

A - Cas de mort précoce d'hématies dans le sang circulant : influence de l'"âge" des cellules qui meurent

Rappelons que nous nommons "âge" des globules à un instant t , l'intervalle de temps séparant cet instant t du moment de leur sortie de la moelle dans le sang circulant.

u_5 : représente, dans notre formulation, l'"âge" des hématies qui meurent et dont la destruction n'est pas aléatoire (mort liée à l'âge).

Afin de ne pas perturber cette analyse par des erreurs expérimentales, nous commencerons par étudier un cas pathologique simulé. Nous répéterons ensuite cette application au cas d'un malade réel.

A - 1 Cas d'un malade simulé

Reprenons le cas simulé de mort extramédullaire qui a été utilisé au chapitre précédent et qui correspond aux valeurs des paramètres :

$u_2 = 0.020$ (proportion de destruction "au hasard", par jour)
 $u_4 = 0.200$ (proportion des hématies qui meurent à l'"âge" u_5)
 $u_5 = 1.5$ jour ("âge" de ces hématies qui meurent et dont la mort est liée à l'âge).

Donnons à l'"âge" des hématies, u_5 , les valeurs :

$u_5 = 0$ - (mort à la sortie de la moelle : $u_4 = u_3$)
 $u_5 = 1$ jour
 $u_5 = 1,5$ jour (valeur exacte)
 $u_5 = 3$ jours
 $u_5 = 5$ jours

Pour chacune de ces valeurs et à partir des 8 points t_k $u_5 = 1.5$
 $t_k = 1 ; 1.3 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10$ et 13 (jours),

identifions successivement :

- la proportion u_4 de mort liée à l'"âge" des globules en donnant à u_2 sa valeur exacte ($u_2 = 0.02$)
- les proportions u_4 et u_2 des deux types de mort précoce envisagés selon que le phénomène dépend ou non de l'âge du globule.

a) Identification de la proportion u_4 en fonction de u_5 , "âge" des globules qui meurent

Elle conduit aux résultats suivants :

	$u_5 = 0$ (sortie)	$u_5 = 1$	$u_5 = 1.5$ (val. exac.)	$u_5 = 3$	$u_5 = 5$
u_4	0.177	0.193	0.199	0.209	0.216
coût	0.86×10^{-2}	0.84×10^{-3}	0.34×10^{-6}	0.77×10^{-2}	0.33×10^{-1}

Il apparaît donc que l'"âge" de la mort extramédullaire a une très faible influence sur le résultat obtenu pour le pourcentage des hématies qui meurent.

En effet, nous avons fait varier le moment de la mort de ces globules entre l'instant même de leur sortie de la moelle dans le sang circulant et un temps de 5 jours compté à partir de leur arrivée dans le sang. Les courbes d'incorporation les plus proches correspondent à un pourcentage de globules qui meurent, qui varie alors entre 17,7 % et 21,6 % (la valeur exacte étant 20 %).

Ceci répond au problème soulevé précédemment : dans quelle mesure une erreur commise sur u_5 , paramètre le plus difficile à ajuster avec précision, perturbe-t-elle les résultats obtenus pour u_4 ?

En effet, une variation de 5 jours de u_5 entraîne une modification de 4 % seulement du pourcentage, u_4 , de destruction.

Il ne faudrait pas cependant en déduire une indépendance de la

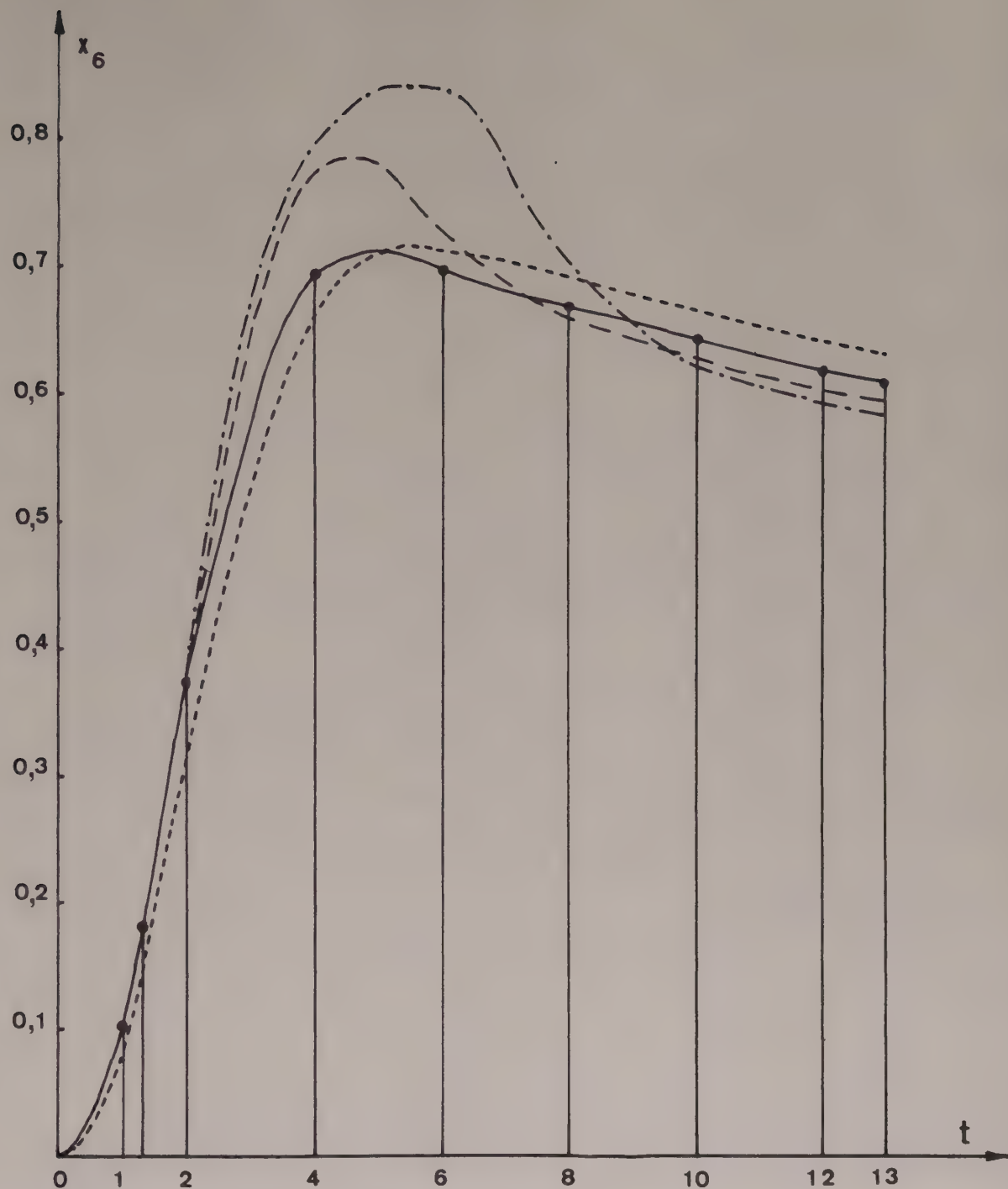
courbe d'incorporation globulaire $X_6(t)$ vis à vis de ce paramètre u_5 , car ce dernier a une très forte influence sur la fonction coût (p. 179) c'est-à-dire sur la qualité de l'approche par la fonction $X_6(t)$ des données de base de cette identification. Les écarts entre la valeur exacte $x_6(t)$, donnée de l'identification et la valeur calculée, $X_6(t)$, d'après les résultats de cette identification apparaissent dans le tableau ci-dessous :

	données	$u_5 = 0$ (sortie)	$u_5 = 1.5$ (val. exacte)	$u_5 = 3$	$u_5 = 5$
u_4	—	0.177	0.199	0.209	0.216
coût	—	0.86×10^{-2}	0.34×10^{-6}	0.77×10^{-2}	0.33×10^{-1}
t (jours)	$x_6(t)$ (incorp. globul.)	$X_6(t)$	$X_6(t)$	$X_6(t)$	$X_6(t)$
1	0.1031	0.085	0.103	0.103	0.103
1.3	0.1786	0.147	0.178	0.178	0.178
2	0.3728	0.310	0.372	0.377	0.377
4	0.6976	0.656	0.697	0.775	0.797
6	0.6997	0.713	0.700	0.734	0.844
8	0.6736	0.695	0.673	0.664	0.709
10	0.6486	0.670	0.648	0.635	0.629
13	0.6112	0.635	0.611	0.597	0.586

D'autre part, la figure (VII.3 - p. 186) permet de mieux apprécier les déformations de la courbe d'incorporation globulaire, provoquées par la variation de l'âge moyen de mort extramédullaire, u_5 , au cours de cette étude.

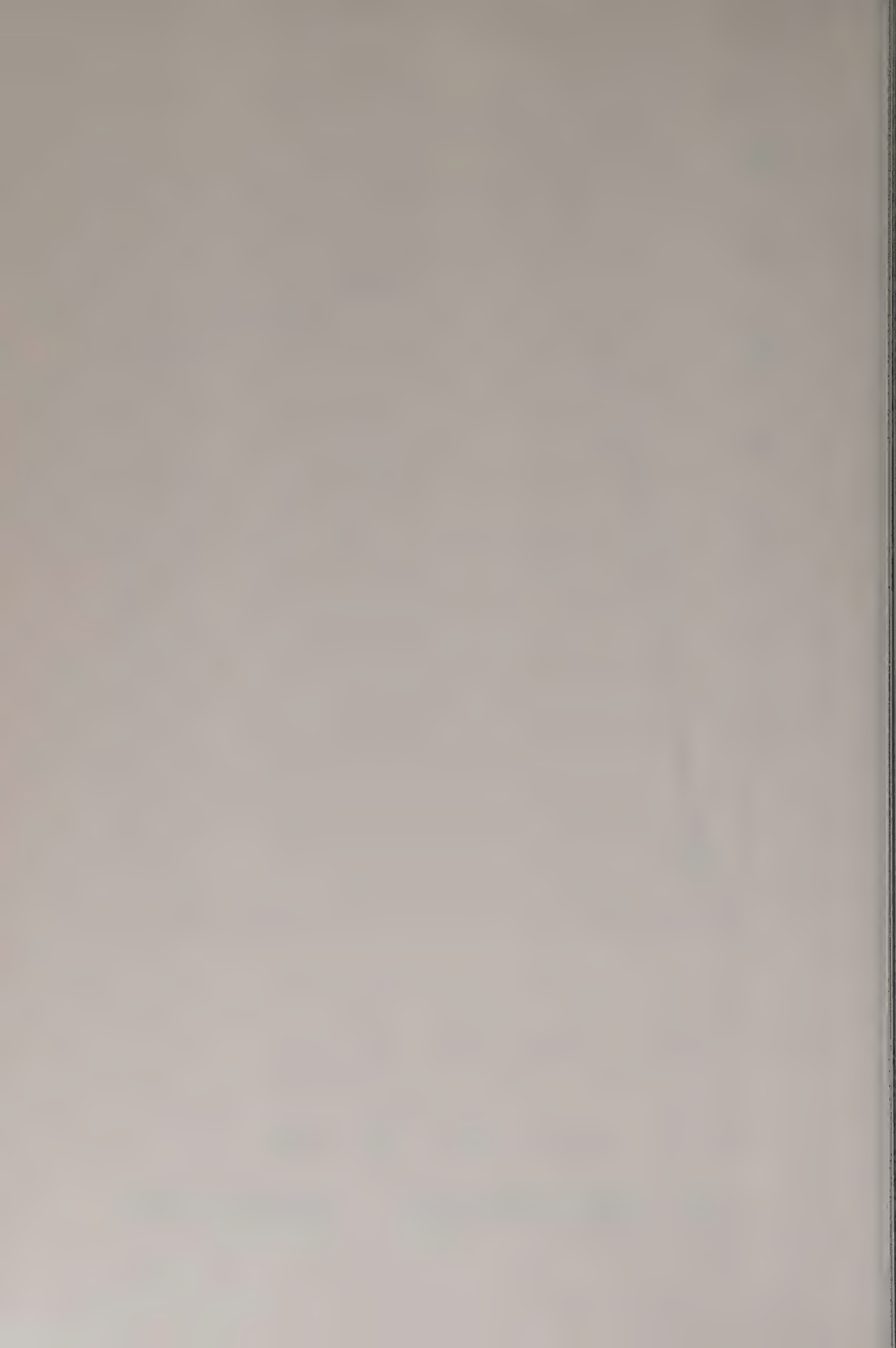
b) Identification en fonction de u_5 des deux paramètres u_2 et u_4 , traduisant le pourcentage de mort extramédullaire respectivement indépendante et liée à l'âge des globules :





.....	$u_5 = 0$	→	$u_4 = 0,177$
————	$u_5 = 1,5$	→	$u_4 = 0,199$
-----	$u_5 = 3$	→	$u_4 = 0,209$
-.-.-.-	$u_5 = 5$	→	$u_4 = 0,216$

Fig.VII-3 : Mort extramédullaire : Influence de l'âge



Recherchons simultanément ces 2 paramètres u_2 et u_4 à partir des mêmes données que celles qui sont utilisées ci-dessus, pour différentes valeurs de u_5 .

	$u_5 = 0$ (sortie)	$u_5 = 1$	$u_5 = 1.55$ (val. exacte)	$u_5 = 3$	$u_5 = 5$
u_2	0.034	0.024	0.020	0.022	0.046
u_4	0.112	0.171	0.198	0.192	0.000
coût	0.43×10^{-2}	0.56×10^{-3}	0.27×10^{-6}	0.76×10^{-2}	0.16×10^{-1}

L'identification de ces deux paramètres en imposant la valeur de u_5 est ici plus sensible à cette dernière.

Néanmoins nous constatons que pour les valeurs de u_5 telles que :

$$1 \text{ jour} \leq u_5 \leq 3 \text{ jours}$$

les résultats de l'identification de u_2 et u_4 restent acceptables et sont presque indépendants de u_5 .

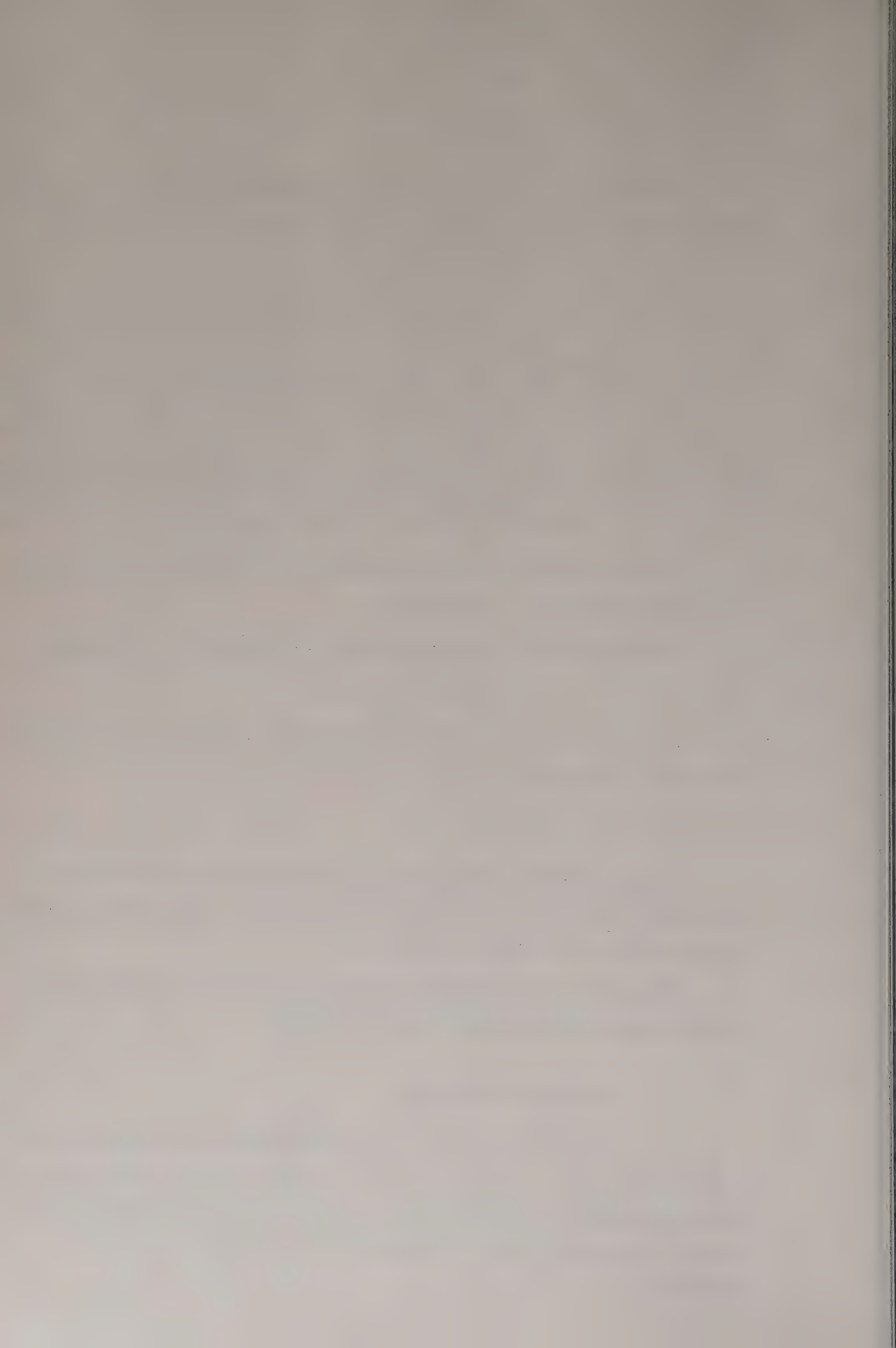
Interprétation de ces résultats :

Le temps moyen au bout duquel se produit la mort des hématies dans le sang circulant a une faible influence sur les valeurs obtenues pour les pourcentages de cellules qui meurent.

Par contre, cet instant a une influence sensible sur l'allure de la courbe d'incorporation globulaire correspondante.

A - 2 Cas d'un malade réel

Nous avons repris les données du premier exemple présenté dans ce chapitre (I - A), et nous avons imposé plusieurs valeurs successives au paramètre u_5 , moment de la mort extramédullaire. Dans chacun des cas, nous avons identifié les proportions u_2 et u_4 de destruction d'hématies.



	$u_5 = 0$ (sortie)	$u_5 = 1$	$u_5 = 1.5$	$u_5 = 2$	$u_5 = 3$
u_2	0.0087	0.0013	0.0032	0.0129	0.0678
u_4	0.340	0.378	0.372	0.324	0.000
coût	0.38×10^{-2}	0.13×10^{-1}	0.21×10^{-1}	0.30×10^{-1}	0.40×10^{-1}

Lorsque le moment de la mort extramédullaire varie entre 0 (sortie de la moelle) et 2 jours, le pourcentage u_4 de destruction liée à l'"âge" des globules, qui correspond à la fonction d'incorporation globulaire la plus proche des données, reste du même ordre de grandeur (34 %, 38 %, 32 %).

Une conclusion analogue ne paraît pas s'appliquer à u_2 , qui traduit le pourcentage de destruction "au hasard" des globules. Mais dans ce cas particulier, cette anomalie pathologique est très faible et si les variations relatives des résultats obtenus pour $u_5 = 0, 1, 1.5$ et 2 semblent plus fortes que dans le cas du malade simulé, les écarts absolus restent du même ordre de grandeur dans les deux cas (0.008).

L'analyse de ce cas réel est donc en accord avec l'interprétation des résultats du cas simulé sur la faiblesse de l'influence de l'"âge" des cellules qui meurent (u_5) sur les résultats obtenus pour les pourcentages de destruction (u_2 et u_4), lorsque cet "âge" demeure dans un intervalle de 2 à 3 jours entourant la valeur exacte.

Remarque :

Cet intervalle "permis" est bien supérieur aux différences rencontrées au cours de l'identification de u_5 dans les cas traités jusqu'à présent.

B - Cas de mort de cellules intramédullaires : influence de l'"age" des
cellules qui meurent et de la durée du cycle de maturation

Rappelons que u_1 représente, dans notre formulation, la fraction du nombre de cellules qui meurent à un "age" τ_A .

τ_A est supposé coïncider avec un changement de stade du cycle médullaire, c'est-à-dire avec l'une des valeurs τ_j qui correspond à une discontinuité de la fonction $f(\tau)$ (voir p. 9).

Nous nous proposons d'étudier l'influence de τ_A au cours de l'identification du paramètre u_1 à partir de données simulées et de données réelles.

L'influence de la durée du cycle de maturation est également analysée sur un cas réel.

B - 1 Cas d'un malade simulé

Prenons comme données les 8 points de la fonction d'incorporation globulaire obtenue par simulation lorsque :

$$u_1 = 0.200$$

$$\tau_A = \tau_{(7)} = 4.083$$

Ces données sont relevées dans le tableau (page suivante), les autres grandeurs ($f(\tau)$, [B] ...) sont fournies en annexe.

L'identification de u_1 pour les valeurs de τ_A imposées :

$$\tau_A = \tau_5 = 2.125 \text{ (jours)}$$

$$\tau_A = \tau_6 = 3.333$$

$$\tau_A = \tau_7 = 4.083 \quad (= \text{valeur exacte})$$

$$\tau_A = \tau_8 = 4.333$$

$$\tau_A = \tau_9 = 4.583$$

$$\tau_A = \theta = 5.083 \quad (\text{moment de la sortie de la moelle})$$

conduit aux résultats suivants :

$u_1 = 0.480$	$(\tau_A = 2.125 \text{ jours})$
$u_1 = 0.266$	$(\tau_A = 3.333)$
$u_1 = 0.199$	$(\tau_A = 4.083)$
$u_1 = 0.186$	$(\tau_A = 4.333)$
$u_1 = 0.177$	$(\tau_A = 4.583)$
$u_1 = 0.169$	$(\tau_A = 5.083)$

A la différence du cas de mort extramédullaire, nous constatons : une influence importante de l'"âge" des cellules médullaires qui meurent, sur le pourcentage de destruction.

Il est à remarquer les faibles valeurs obtenues pour la fonction coût. Les écarts observés entre la fonction $X_6(t)$ reconstruite à partir des résultats des diverses identifications et les données $x_6(t_k)$ sont en effet très faibles comme le montrent le tableau ci-dessous :

	données	$\tau_A = 2.125$	$\tau_A = 4.083$ (val. exact.)	$\tau_A = 4.583$	$\tau_A = 5.083$ (sortie)
u_1	—	0.480	0.199	0.177	0.169
coût	—	0.57×10^{-3}	0.16×10^{-6}	0.24×10^{-5}	0.38×10^{-5}
t (jours)	$x_6(t)$ (incorp. globu.)	$X_6(t)$	$X_6(t)$	$X_6(t)$	$X_6(t)$
0.5	0.017	0.014	0.017	0.017	0.017
1	0.085	0.074	0.085	0.086	0.086
2	0.316	0.298	0.316	0.317	0.317
4	0.687	0.681	0.687	0.687	0.687
5	0.752	0.753	0.753	0.753	0.753
7	0.780	0.785	0.780	0.780	0.780
10	0.787	0.792	0.787	0.787	0.787
15	0.787	0.793	0.788	0.788	0.788

Nous constatons qu'il est possible de trouver des valeurs de la fonction $X_6(t)$ d'incorporation globulaire presque identiques avec des combinaisons très différentes des deux paramètres "âge" et "proportion" des cellules médullaires qui meurent : $(\tau_A \text{ et } u_1)$.

Et, contrairement au cas de la mort extramédullaire, l'"âge" τ_A des cellules qui meurent dans la moelle a une très forte importance sur le résultat de l'identification du pourcentage de destruction u_1 .

La détermination de ce pourcentage u_1 des cellules qui meurent nécessite donc la connaissance de l'"âge" moyen τ_A de ces cellules. Et il serait vain d'espérer déterminer, à partir de ces seules données expérimentales, les deux paramètres u_1 et τ_A .

Le problème du choix de cette valeur τ_A se pose donc :

- faut-il fixer une valeur moyenne arbitraire afin de pouvoir comparer le pourcentage de mort cellulaire de tous les malades entre eux (exemple : fin du même stade médullaire , la durée du cycle pouvant être éventuellement variable d'un malade à l'autre) ?
- peut-on obtenir des renseignements expérimentaux supplémentaires concernant ce paramètre ?

La première suggestion nous a été catégoriquement déconseillée par les médecins. Par contre, il semble possible d'utiliser les résultats d'examens tels que des comptages externes en radioactivité sur certains organes.

B - 2 Cas d'un malade réel

Deux études ont été effectuées ; elles concernent :

- l'"âge" τ_A des cellules qui meurent
- la durée du cycle de maturation dans la moelle.

a) Influence de l'"age" τ_A des cellules qui meurent

Comme précédemment identifions la proportion u_1 de cellules qui meurent en imposant successivement plusieurs valeurs à l'"age" τ_A de ces cellules

$$\tau_A = \tau_j \quad \text{où } j = 6, 7, 8, 9 \text{ et } 11$$

La dernière valeur, τ_{11} , correspond à la sortie des cellules mûres dans le sang circulant.

Les données utilisées sont celles de notre second exemple de ce chapitre (I. B). Nous obtenons les résultats suivants :

	données	$\tau_A = 3.333$	$\tau_A = 4.083$	$\tau_A = 4.833$	$\tau_A = 5.583$	$\tau_A = 7.083$
u_1	—	0.622	0.543	0.491	0.453	0.417
coût	—	0.14×10^{-2}	0.13×10^{-2}	0.12×10^{-2}	0.12×10^{-2}	0.10×10^{-2}
t (jours)	$x_6(t)$ Incorp. glob.	$X_6(t)$	$X_6(t)$	$X_6(t)$	$X_6(t)$	$X_6(t)$
0.96	0.005	0.005	0.006	0.006	0.006	0.006
1.25	0.010	0.010	0.010	0.011	0.011	0.011
2	0.025	0.028	0.029	0.029	0.030	0.030
4	0.135	0.120	0.122	0.122	0.123	0.125
8	0.260	0.282	0.281	0.280	0.280	0.279
10	0.290	0.303	0.303	0.302	0.302	0.300
12	0.320	0.315	0.315	0.315	0.315	0.315
14	0.345	0.322	0.322	0.322	0.323	0.324

Ces résultats conduisent aux mêmes conclusions que celles qui ont été déduites de l'étude des cas simulés :

- la forte influence de τ_A sur le résultat de l'identification de la proportion u_1 de cellules qui meurent.

- La possibilité de trouver des combinaisons "age" "proportion", (τ_A, u_1) , très différentes qui correspondent à des fonctions d'incorporation globulaire pratiquement identiques (l'écart maximum observé entre ces fonctions étant de 0.005).

Remarque :

Il peut paraître paradoxal que, pour obtenir une même courbe d'incorporation globulaire, $X_6(t)$, la proportion des cellules médullaires qui meurent doit être d'autant plus forte que l'instant de cette destruction est plus précoce dans le cycle de maturation. En effet, le nombre des cellules mûres qui sortent sous forme de globules dans le sang, décroît lorsque le taux de mortalité augmente.

Mais la quantité de Fer radioactif emportée par chaque cellule morte est elle-même d'autant plus faible que la destruction est plus précoce. Et, pour une fonction d'incorporation globulaire, $X_6(t)$, donnée, tout autre paramètre restant identique, la quantité de Fer marqué emportée par les cellules mortes est également fixée : le nombre des cellules mortes doit donc augmenter lorsque le moment de la destruction est plus précoce dans le cycle de maturation médullaire.

b) Influence de la durée du cycle médullaire

Reprenant l'exemple réel utilisé ci-dessus, nous avons identifié la proportion, u_1 , des cellules médullaires qui meurent, pour différentes valeurs de la durée θ du cycle de maturation médullaire.

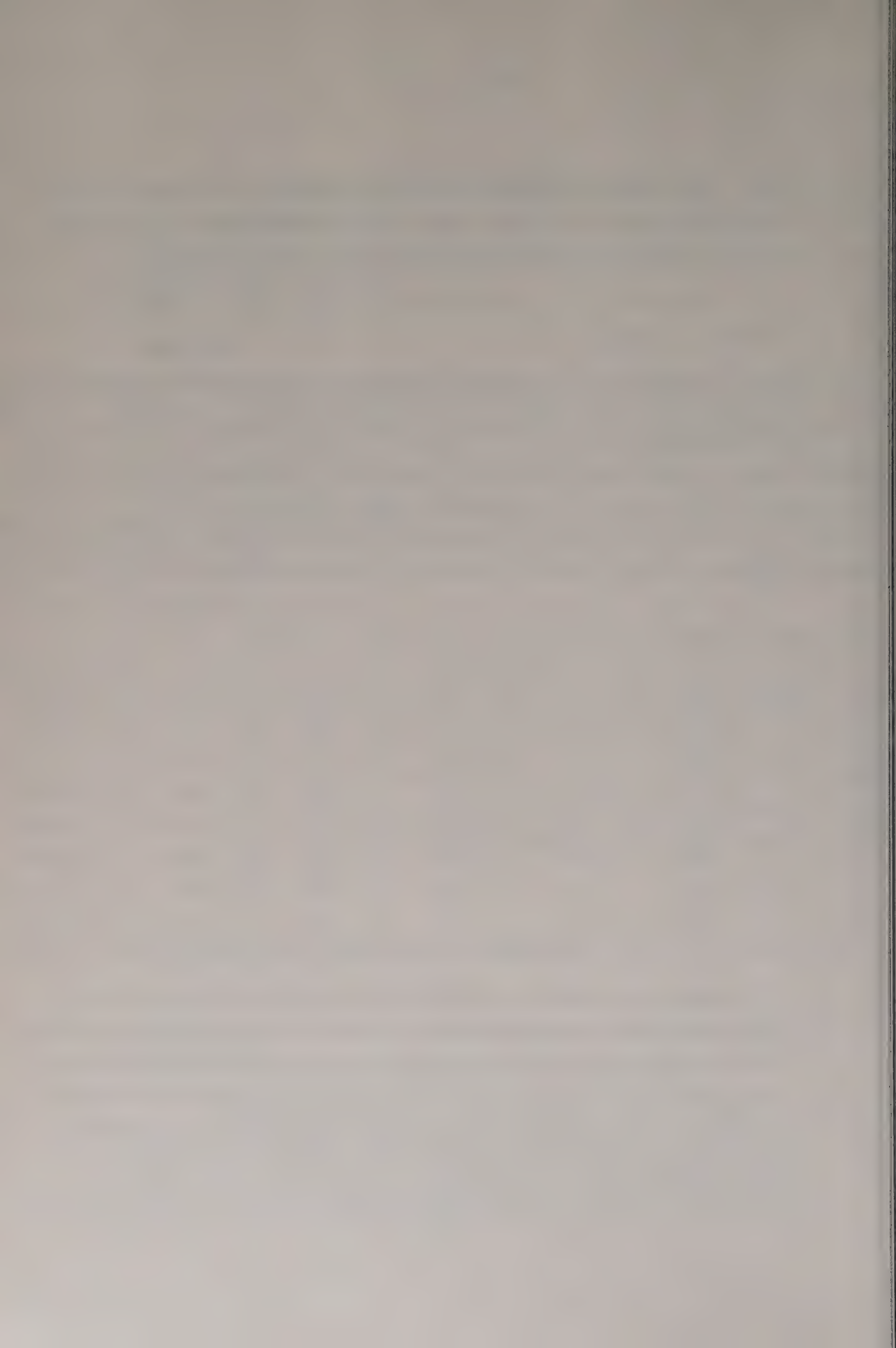
L'instant τ_A de la mort intramédullaire est pris égal à τ_9 , c'est-à-dire au début de la phase ultime de maturation des réticulocytes ($R3 \rightarrow R4$). C'est en effet avec cette valeur que nous avons obtenu le meilleur résultat d'identification pour ce malade.

La variation de la durée du cycle médullaire s'effectuant par dilatation de l'échelle de l'âge τ des cellules, entraîne donc une modification des moments τ_j de changement de stades et en particulier de τ_A .

Aussi avons nous relevé toutes ces valeurs dans le tableau de résultats ci-dessous.

	données	$\theta = 5.083$	$\theta = 5.583$	$\theta = 6.083$	$\theta = 6.583$	$\theta = 7.083$
u_1	—	0.497	0.483	0.473	0.463	0.453
τ_A	—	4.583	5.041	5.083	5.333	5.583
coût	—	0.94×10^{-2}	0.63×10^{-2}	0.28×10^{-2}	0.14×10^{-2}	0.12×10^{-2}
t (jours)	$x_6(t)$ Incorp. globu.	$X_6(t)$	$X_6(t)$	$X_6(t)$	$X_6(t)$	$X_6(t)$
0.96	0.005	0.015	0.013	0.007	0.007	0.006
1.25	0.010	0.029	0.025	0.015	0.013	0.011
2	0.025	0.072	0.061	0.044	0.035	0.030
4	0.135	0.196	0.185	0.164	0.142	0.123
8	0.260	0.272	0.274	0.278	0.279	0.280
10	0.290	0.286	0.290	0.296	0.300	0.302
12	0.320	0.294	0.299	0.306	0.311	0.315
14	0.345	0.299	0.305	0.313	0.319	0.323

Nous constatons que l'influence de la durée θ du cycle médullaire sur le résultat de l'identification de la proportion u_1 de cellules qui meurent est sensible mais reste très modérée puisque une augmentation de 2 jours de θ réduit cette proportion de 49,7 % à 45,3 %. Cependant, cette durée du cycle a une grande influence sur l'allure de la courbe d'incorporation globulaire obtenue et sur la qualité de l'approche comme le montrent le tableau de résultats ci-dessus et les courbes de la figure VII 4, page suivante.



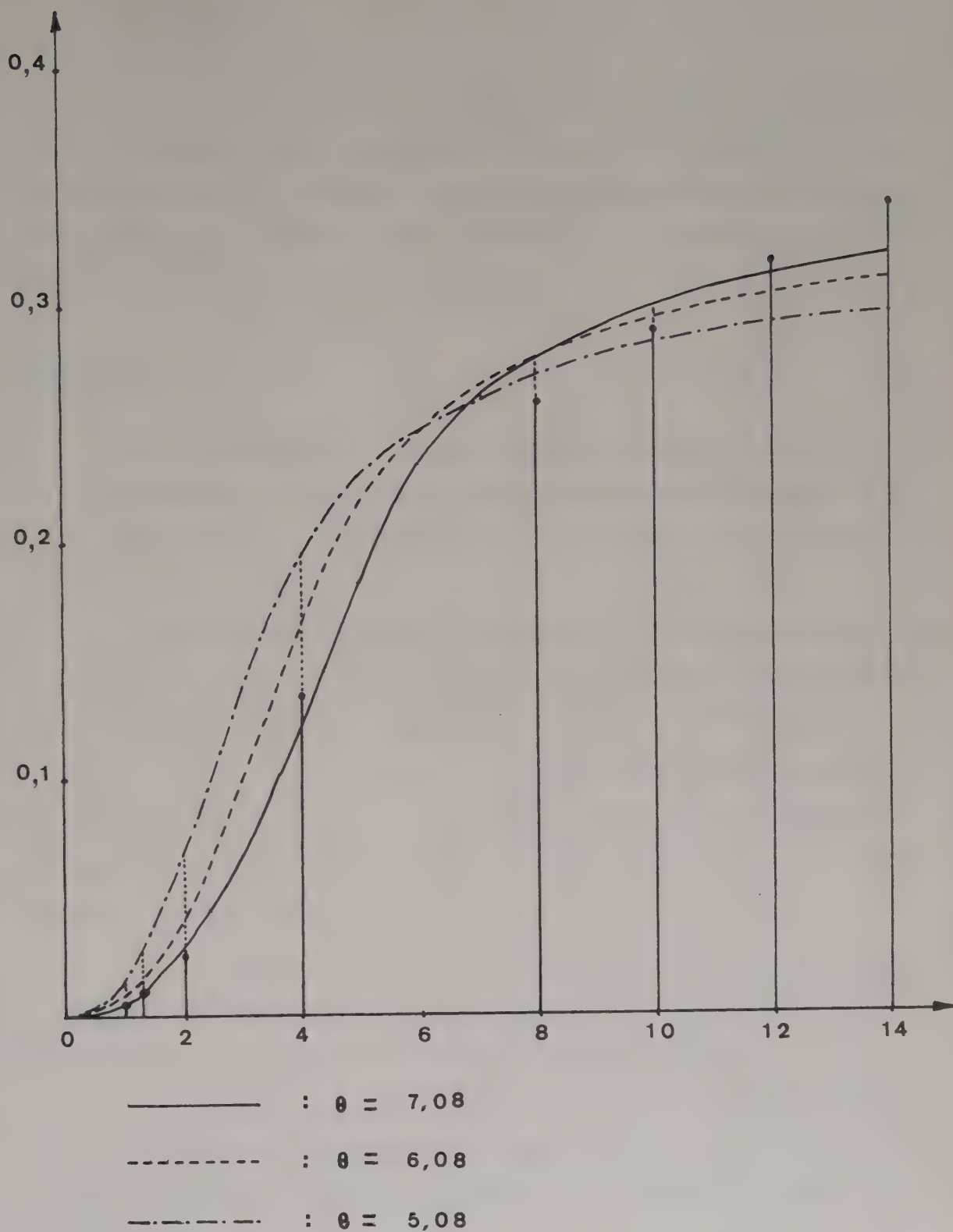
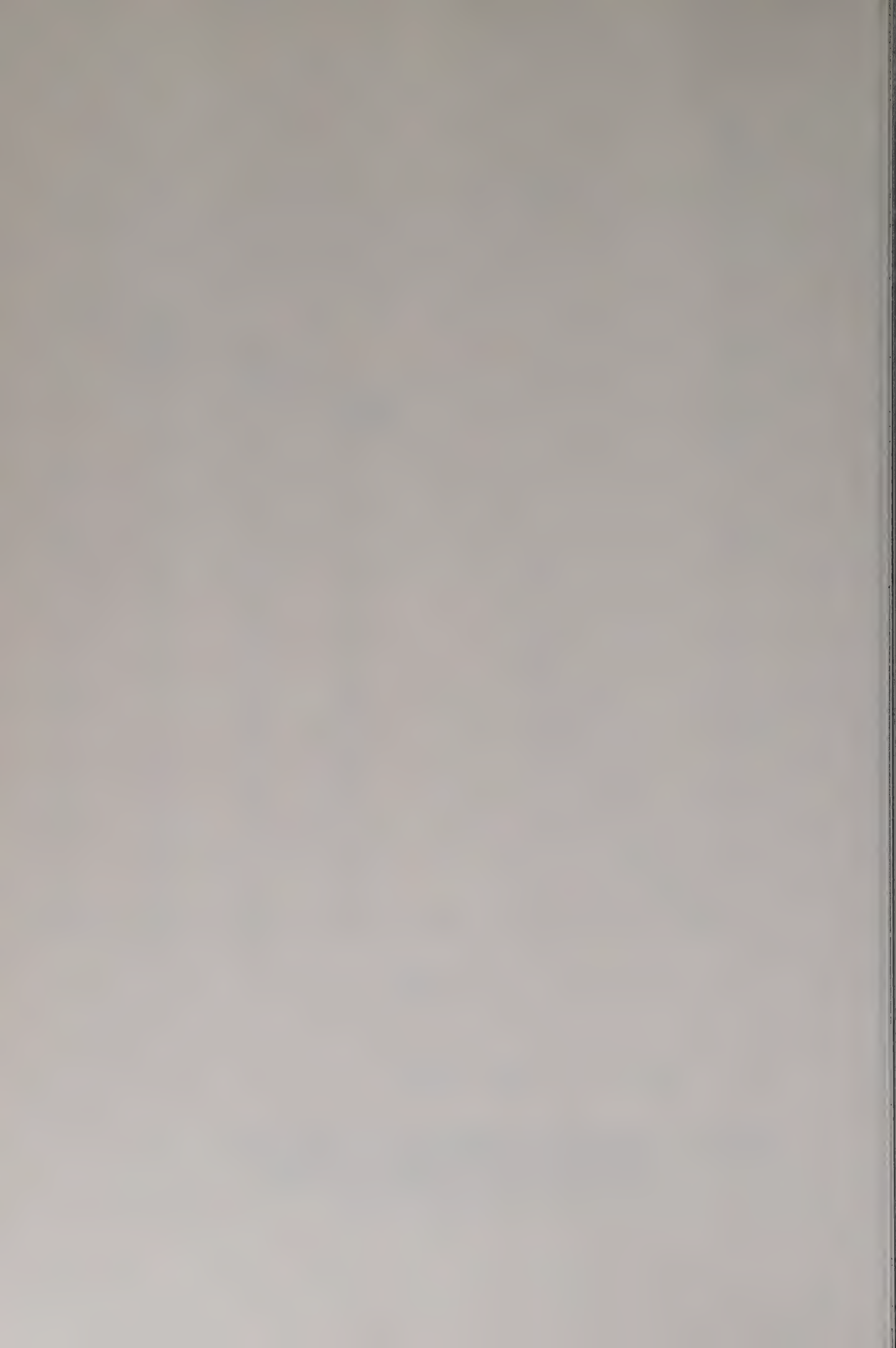


Fig.VII.4 - Mort intramédullaire - cas réel -
- Influence de la durée du cycle



Ce point permet de penser que la durée du cycle médullaire doit être relativement facile à identifier. A la suite des demandes qui nous ont été faites par les médecins, nous envisageons d'ailleurs d'introduire ce paramètre dans l'ensemble des inconnues. Cette extension ne soulève, à priori, aucune difficulté mathématique.

Conclusion

Nous avons montré que notre programme d'identification permettait de déterminer les paramètres caractéristiques des principales anomalies rencontrées. L'application à des cas réels en semi-routine est en cours.

L'étude complémentaire de l'influence de divers paramètres nous a permis de constater trois résultats particulièrement intéressants du point de vue mathématique et pour leur interprétation médicale.

- Une légère modification du moment de la destruction de globules du sang circulant ne change pratiquement pas les résultats de l'identification, mais a une influence sensible sur l'allure de la courbe d'incorporation globulaire.

- Dans le cas de la mort intramédullaire, il existe plusieurs combinaisons "âge" et pourcentage de destruction qui correspondent à des courbes d'incorporation globulaire presque identiques.

- La valeur de la durée du cycle de maturation a une influence modérée sur les résultats de l'identification du pourcentage de destruction mais modifie fortement l'allure de la fonction d'incorporation globulaire.

Ces résultats montrent que s'il est inutile d'essayer de déterminer simultanément l'instant moyen et le pourcentage de destruction de cellules médullaires, l'identification supplémentaire de la durée du cycle médullaire ne doit pas poser de gros problèmes.

Cette étude complémentaire donne donc de précieux renseignements. Elle met en évidence le rôle de l'analyse fine d'un modèle élaboré en collaboration étroite entre médecins, mathématiciens et informaticiens.

CONCLUSION

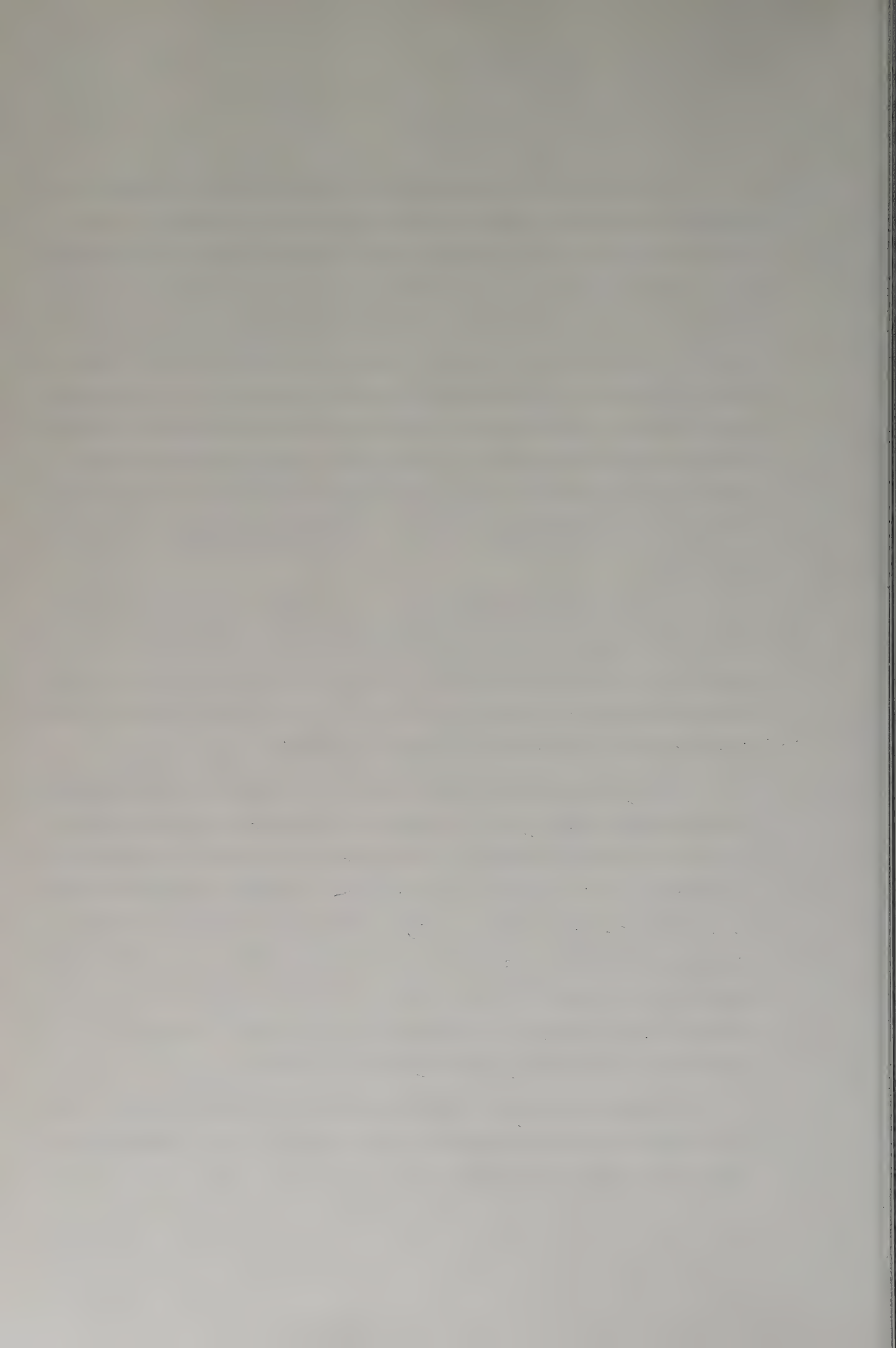
GENERALE

L'identification des paramètres du modèle de la Cinétique du fer radioactif qui conduit à un problème mathématique particulier paraît, sur le plan médical, d'un grand intérêt. Il permet d'aider à déterminer les anomalies pathologiques et de les quantifier à partir de données de laboratoires. C'est ainsi que, connaissant une dizaine de points de la courbe d'incorporation globulaire, nous avons pu déterminer le pourcentage des cellules qui étaient détruites soit au cours de leur maturation dans la moelle, soit après leur sortie dans le sang circulant. Le modèle mathématique nous a permis également des études complémentaires comme celle de l'influence du moment de la destruction des cellules médullaires ou des hématies et celle de la durée du cycle de maturation médullaire.

Au point de vue mathématique, la méthode d'identification par quadratisation partielle s'est montrée très efficace. Dans tous nos exemples traités, la convergence des résultats est rapide puisque la solution est obtenue au bout de deux ou trois itérations lorsque le système intégral-différentiel est résolu avec une bonne précision.

C'est au niveau de la résolution de ce système que sont apparues les principales difficultés. Ces dernières étaient dues à la complexité de la structure du système et à l'existence du maximum très aigu de l'un des éléments de la solution. La méthode de résolution des systèmes différentiels à pas liés, implicite, s'est révélée particulièrement bien adaptée à ce problème et nous a donné des résultats d'une grande précision (de l'ordre de 10^{-6}). Pour réduire la durée des calculs, nous avons modifié le pas en cours de résolution ; la valeur des "temps-machine" nécessaires a été ainsi divisée par trois ou quatre.

Le programme mis au point paraît être un bon outil pour l'étude de ce phénomène physiologique et pathologique et, pour l'exploitation en routine de données expérimentales.



ANNEXE

COMPLEMENTS SUR LES DONNEES

NOTES

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

Nous présentons dans cette annexe, quelques précisions sur les données qui concernent à la fois la formulation et les résultats expérimentaux. Il s'agit de :

- la structure même de la matrice $[B (U)]$ du système intégral-différentiel étudié :

$$\frac{d}{dt} X (t) = [B (U)] X (t) + \varphi (t) \quad (1)$$

- des valeurs numériques affectées aux divers paramètres au cours des essais présentés.

I - STRUCTURE DE LA MATRICE $[B (U)]$

Cette matrice est déduite du bilan des échanges de Fe^{*} entre les différents compartiments du modèle utilisé (p. 10) et compte tenu des hypothèses posées (p. 11 et 12).

$$[B (U)] = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & 0 & k_5 & k_3 & k_7 & 0 \\ k_1 & -k_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(k_5 + k_6) & 0 & 0 & u_2 \\ k_2 & 0 & 0 & -(k_3 + k_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_6 & 0 & -(k_7 + k_8) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

où :

$\underline{u_2}$ est l'un des paramètres inconnus. Il représente la proportion des globules détruits par jour (phénomène "au hasard" du chapitre I).

. $k_1, k_2 \dots k_9$ sont les coefficients de transfert entre les différents compartiments du modèle (p. 10).

Les 8 premiers coefficients, $k_1, k_2 \dots k_8$ sont indépendants des paramètres inconnus u_i : ce sont des constantes dont les valeurs diffèrent d'un malade à l'autre et sont déduites de mesures expérimentales (courbe de décroissance plasmatique de transferrine marquée, exploration à l'hémoglobine marquée : Réf. 14, 15, 16).

Le coefficient k_9 dépend, lui, du paramètre recherché u_1 : en effet, nous avons montré dans nos travaux antérieurs (Réf. 11 et 12) que ce coefficient d'échange était donné par la relation :

$$k_9 = \int_0^{\theta} f_r(\tau) d\tau \quad (3)$$

où $f_r(\tau)$ est une fonction d'"absorption cellulaire" caractérisant l'individu traité et définie par :

$$f_r(\tau) = N_0 \times I(\tau) \times c(\tau) \quad (4)$$

avec :

- . N_0 : nombre de cellules souches apparaissant par unité de temps (= nombre de familles qui sortent de la moelle par unité de temps).
- . $I(\tau)$: avidité d'une cellule médullaire d'"âge" τ .
- . $c(\tau)$: nombre de cellules vivantes d'une famille d'"âge" τ , en cours de maturation dans la moelle.

Or, au cours de notre formulation, nous avons supposé que, lorsqu'il y a destruction de cellules médullaires, l'avidité $I(\tau)$ de chaque cellule demeure inchangée. Seul le nombre de cellules $c(\tau)$ de chaque famille se trouve modifié :

$$\begin{aligned} c(\tau) &= c(\tau)_{\text{normal}} \quad \text{si } \tau < \tau_A \\ c(\tau) &= (1 - u_1) c(\tau)_{\text{normal}} \quad \text{si } \tau \geq \tau_A \end{aligned} \quad (5)$$

où u_1 est la proportion de cellules médullaires mourant à l'"âge" τ_A .

Si $f(\tau)$ représente la fonction "d'absorption cellulaire" dans le cas normal, pour un cas pathologique nous avons donc :

$$f_r(\tau) = \begin{cases} f(\tau) & \text{si } \tau < \tau_A \\ (1 - u_1) f(\tau) & \text{si } \tau \geq \tau_A \end{cases} \quad (6)$$

Le coefficient k_9 , défini par (3) s'écrit alors :

$$k_9 = \int_0^{\tau_A} f(\tau) d\tau + (1 - u_1) \int_{\tau_A}^{\theta} f(\tau) d\tau \quad (7)$$

où $f(\tau)$ est la fonction "d'absorption cellulaire" de l'individu normal.

Remarque :

tous les calculs intervenant dans les intégrales du tableau $\varphi(t)$, ont été effectués en fonction de $f(\tau)$ par l'intermédiaire de la relation (6).

II - COMPLEMENTS SUR LES DONNEES CORRESPONDANT AUX ESSAIS PRESENTES

Au cours des différents chapitres, pour ne pas alourdir la présentation, nous n'avons pas précisé les valeurs numériques affectées :

. aux coefficients $k_1, k_2, \dots, k_8$ (k_9 étant calculé par l'intermédiaire de la relation 7).

. à la fonction $f(\tau)$.

Reprenons successivement tous les essais présentés.

a) Chapitre IV : vérification du calcul des intégrales : (p. 123 et 124)

Si $f(\tau_j)$ représente $f(\tau)$ pour $\tau_{j-1} < \tau < \tau_j$, la fonction "escalier" utilisée est donnée par le tableau :

	<u>τ</u>		<u>$f(\tau)$</u>	
	<u>heures</u>	<u>jours</u>		
(8)	13	0.541	0.200	
	26	1.083	0.400	$a_1 = 0.013\ 53$
	43	1.791	0.800	$a_2 = -1.038\ 22$
	51	2.125	1.600	$a_3 = 1.024\ 69$
	80	3.333	1.920	
	98	4.083	2.340	
	104	4.333	1.950	$b_1 = -0.3500$
	110	4.583	1.560	$b_2 = -11.200$
	116	4.833	0.975	$b_3 = -4.1583$
	122	5.083	0.390	

$$x_2(t) = \sum_{i=1}^3 a_i e^{b_i t}$$

la durée du cycle de maturation médullaire a la valeur :

$$\theta = 5.083 \text{ jours } (= \tau_{11})$$

b) Chapitre V : résolution du système intégral-différentiel

Tous les calculs de ce chapitre ont été effectués avec la même fonction $f(\tau)$ et des coefficients d'échange k_i identiques (Tableaux p. 133, 134, 136, 140, 141 et 143) :

- La fonction $f(\tau)$ utilisée est la même que celle du chapitre IV (voir tableau (8) précédent).

- Les coefficients d'échange sont tels que :

$$\begin{aligned}k_1 &= 18.4 & (\text{jour}^{-1}) \\k_2 &= 5.30 \\k_3 &= 0.70 \\k_4 &= 0.16 \\k_5 &= 0.00 \\k_6 &= 0.00 \\k_7 &= 0.35 \\k_8 &= 0.08\end{aligned} \tag{9}$$

c) Chapitre VI : Identification des paramètres u_i d'après les données simulées

- Dans tous les exemples, la fonction $f(\tau)$ utilisée est également conservée (valeurs du tableau 8 ci-dessus).

- Les coefficients k_i gardent les valeurs présentées ci-dessus (9), dans tous les exemples à l'exception de celui du paragraphe II - A (p. 156) où nous utilisons une simulation d'un cas pathologique avec réutilisation du fer des cellules mortes :

$$\begin{aligned}k_1 &= 5.20 & k_5 &= 7.00 \\k_2 &= 3.48 & k_6 &= 14.00 \\k_3 &= 0.22 & k_7 &= 0.22 \\k_4 &= 0.32 & k_8 &= 0.32\end{aligned}$$

d) Chapitre VII - Applications médicales

I - Exemple I A :

<u>heures</u>	<u>τ</u>		<u>$f(\tau)$</u>
		<u>jours</u>	
13		0.541	0.200
26		1.083	0.400
43		1.791	0.800
51		2.125	1.600
80		3.333	1.920
98		4.083	1.860
104		4.333	1.550
110		4.583	1.240
116		4.833	0.775
122		5.083	0.310

$$k_1 = 5.20 \text{ jour}^{-1}$$

$$k_2 = 3.48$$

$$k_3 = 0.22$$

$$k_4 = 0.32$$

$$k_5 = 7.00$$

$$k_6 = 10.0$$

$$k_7 = 0.35$$

$$k_8 = 0.08$$

Exemple I B : (voir page 205)

II - Exemple A.1 (k_i et $f(\tau)$ comme dans le chapitre VI)

Exemple A.2 (k_i et $f(\tau)$ comme ci-dessus I A)

Exemple B.1 (k_i et $f(\tau)$ comme dans le chapitre VI)

Exemple B.2.a : (k_i et $f(\tau)$ comme pour I B)

Exemple B.2.b :

k_i : identiques à ceux de I B

$f(\tau)$: égale à la fonction de I B si $\tau \leq 4.083$ jours

pour $\tau > 4.083$ jours : il y a dilatation de l'échelle
des temps, les valeurs $f(\tau_j)$
étant conservées.

I - Exemple I B :

<u>heures</u>	<u>τ</u>	<u>$f(\tau)$</u>
	<u>jours</u>	
13	0.542	0.200
26	1.083	0.400
43	1.792	0.800
51	2.125	1.600
80	3.333	1.920
98	4.083	1.860
116	4.833	1.550
134	5.583	1.240
152	6.333	0.775
170	7.083	0.310

$$k_1 = 2.96 \text{ jour}^{-1}$$

$$k_2 = 5.64$$

$$k_3 = 0.25$$

$$k_4 = 0.26$$

$$k_5 = 7.00$$

$$k_6 = 26.0$$

$$k_7 = 0.25$$

$$k_8 = 0.26$$

III - PARAMETRES INTERVENANT DANS LES TESTS D'ARRET DU
PROGRAMME D'IDENTIFICATION :

$$\varepsilon_1 = 10^{-4}$$

$$\varepsilon_4 = 10^{-6}$$

$$\text{ITM} = 6 \text{ ou } 10$$

$$\text{K1M} = 4$$

$$\text{K2M} = 4$$

$$\text{K3M} = 4$$

$$\text{K4M} = 4$$

Les définitions de ces paramètres sont données au chapitre II (paragraphe IV).

Date		Time		Place		Remarks	
1900	Jan 1	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 2	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 3	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 4	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 5	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 6	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 7	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 8	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 9	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 10	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 11	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 12	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 13	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 14	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 15	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 16	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 17	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 18	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 19	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 20	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 21	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 22	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 23	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 24	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 25	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 26	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 27	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 28	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 29	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 30	10	10	10	10	10	10
1900	Jan 31	10	10	10	10	10	10

Summary of the above table showing the total number of observations made during the month of January 1900. The total number of observations is 31, which corresponds to the number of days in the month. The observations were made at regular intervals of 10 minutes, starting from 10:00 AM and ending at 10:00 PM. The observations were made at the same place, and the remarks were recorded for each observation. The observations were made by the same person, and the results were consistent throughout the month.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 CAZAL P ; WAGNER A.

"Procédé automatique de traitement de la Cinétique plasmatique expérimentale du Fer radioactif".

Journal of Nuclear Medicine and Biology, 1974,
Vol. 1, (pp. 135 - 144) Pergamon Press
Northern Ireland.

- 2 CHAU Nearkasen

"Optimisation par une méthode du gradient avec accélération de convergence - Problèmes avec contraintes".

Thèse de 3ème Cycle - Université de Nancy (1972).

- 3 CHAVENT G.

"Analyse fonctionnelle et identification de coefficients répartis dans les équations aux dérivées partielles".

Thèse d'Etat - Paris (1971).

- 4 FILLET G. ; COOK J.D. ; FINCH C.A.

"Storage Iron kinetics".

The Journal of Clinical Investigation, Vol. 53,
June 1974 (pp. 1527 - 1533).

- 5 GROTH T. ; SCHNEIDER W. ; SANDEWALL E. ; VUILLE J.

"Computer Simulation of Ferrokinetic Models".

Computer programs in Biomedicine, Vol. 1, n° 2,
June 1970 (pp. 90 - 104).

- 6 KERNEVEZ J.P.

"Numerical analysis of problems arising in Biochemistry".

Computing Methods in Applied Sciences and
Engineering. Part. II - (pp. 312 - 325) Springer
Verlag - Heidelberg : 1974.

- 6' KUTZMIN H. ; WELLNER U.

"Untersuchungen des Eisenstoffwechsels mit einem neuen Modell der Eisenkinetik".

R. Clin. Nucl. Med. (Schattauer - Stuttgart), 1971
(pp. 516 - 537).

1. CHURCH, J. W. 1911.

Investigation of the
...
...
Vol. 1, 1911.
New York.

2. CHURCH, J. W. 1912.

Organization and
...
...
Thèse d'Etat - Paris (1912).

3. CHURCH, J. W. 1913.

...
...
Thèse d'Etat - Paris (1913).

4. CHURCH, J. W. ; COOK, J. D. ; FINCH, C. A. 1914.

The Journal of Chemical Investigation, Vol. 1, 1914.
(1914-1915).

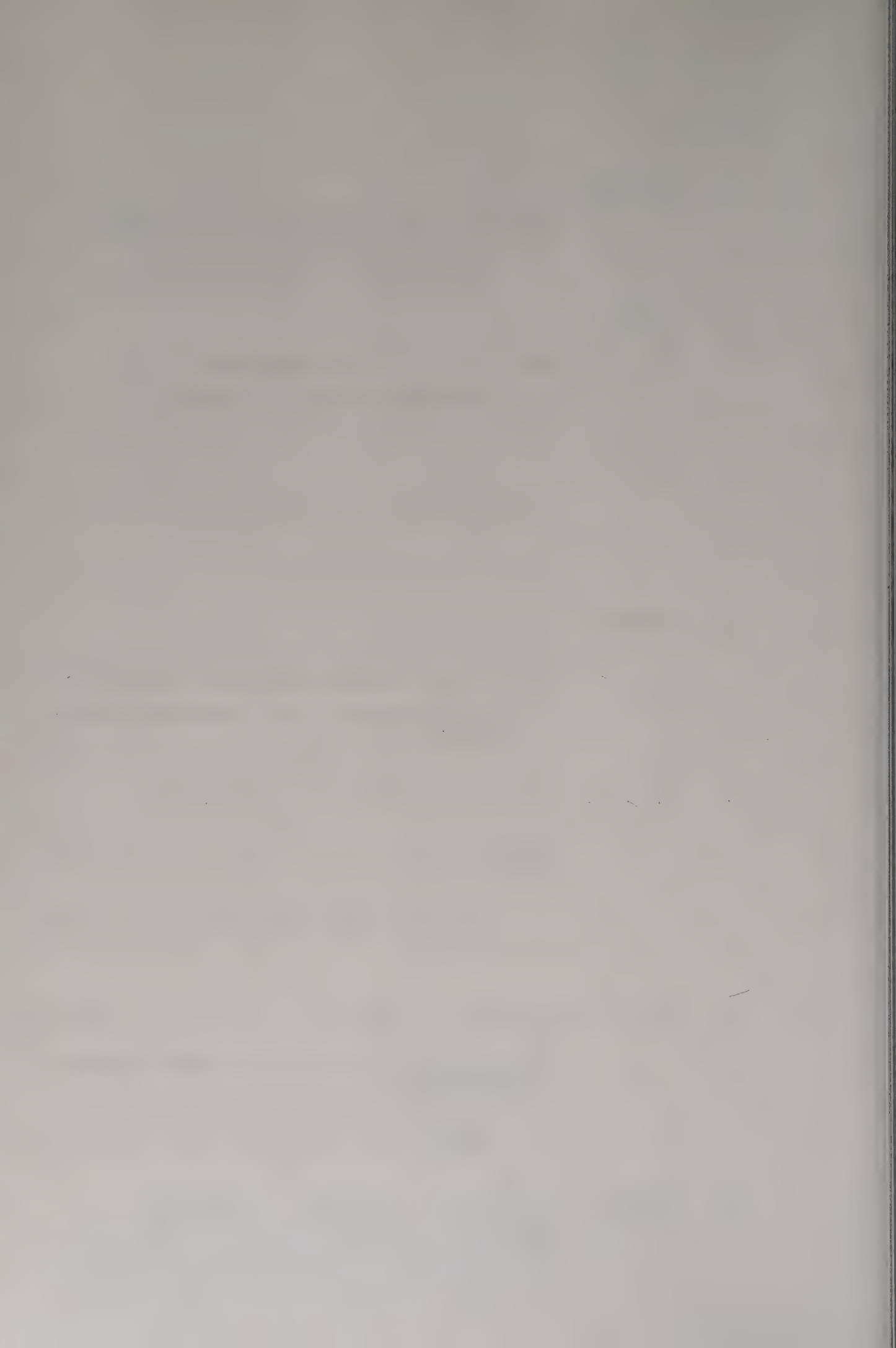
5. GROTH, T. ; SCHNEIDER, W. ; SANDERWALL, E. ; VOLLER, J. 1915.

...
...
(1915).

6. GROTH, T. ; SCHNEIDER, W. ; SANDERWALL, E. ; VOLLER, J. 1916.

...
...
Part II - 1916.
Verlag - Heidelberg.

- 7 LEGRAS J.
 "Méthodes et techniques de l'analyse numérique"
 Ed. Dunod (Paris) - 1971.
- 8 LEGRAS J.
 Cours de D.E.A. sur l'optimisation
 Université de Nancy I - (non publié).
- 9 LIONS J. L.
 "Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des
 équations aux dérivées partielles".
 Ed. Dunod - 1968.
- 10 MONOT C.
 "Ajustement numérique d'un système différentiel liné-
 aire à l'aide de la transformation de Laplace".
 Thèse de 3ème cycle - Université de Nancy -
 (1967).
- 11 MONOT C. ; MARTIN J. ; NAJEAN Y. ; DRESCH C.
 "Problèmes posés par la simulation de la cinétique du
 Fer".
 Journées d'Informatique Médicale - IRIA -
 Toulouse 1969 (pp. 219 - 241) - Muray Print
 (Paris).
- 12 MONOT C. ; MARTIN J. ; NAJEAN Y. ; DRESCH C. ; FAILLE A.
 "Simulation de la cinétique du fer radioactif dans les
 cas pathologiques".
 Journées d'Informatique Médicale - IRIA -
 Toulouse 1972 (éd. IRIA) Vol. 2, pp. 183 - 199.
- 13 MONOT C. ; NAJEAN Y. ; DRESCH C. ; MARTIN J.
 "Models of erythropoiesis and clinical diagnosis".
 A paraître dans Mathematical Biosciences.



- 14 NAJEAN Y. ; DRESCH C. ; ARDAILLOU N. ; BERNARD J.

"Iron metabolism. Study of different kinetic models
in normal conditions"

Amer. J. Physio. 1967 - 213 (pp. 533 - 546)

- 15 NAJEAN Y. ; DRESCH C. ; DONIO J. ; FAILLE A.

"Modèle de l'érythropoïèse à partir de 3 H - Thymidine
par la moelle "in vitro" et sa vérification par l'étude
de la cinétique du radio-fer "in vivo"".

Rev. Fr^{se} Et Clin. Biol. 1969, 14, (pp. 575 - 586).

- 16 NAJEAN Y ; MONOT C. ; DRESCH C. ; FAILLE A. ; MARTIN J.

"Systematic study of the influence of various parameters
of erythropoiesis and iron metabolism on in vivo ⁵⁹Fe
curve"

(A paraître).

- 17 NGUYEN VAN TUAN

"Méthode d'optimisation par interpolation de la fonction
objectif - Application à un problème de contrôle optimal"

Thèse de 3ème cycle - Université de Nancy (1973).

- 18 NOONEY G.C.

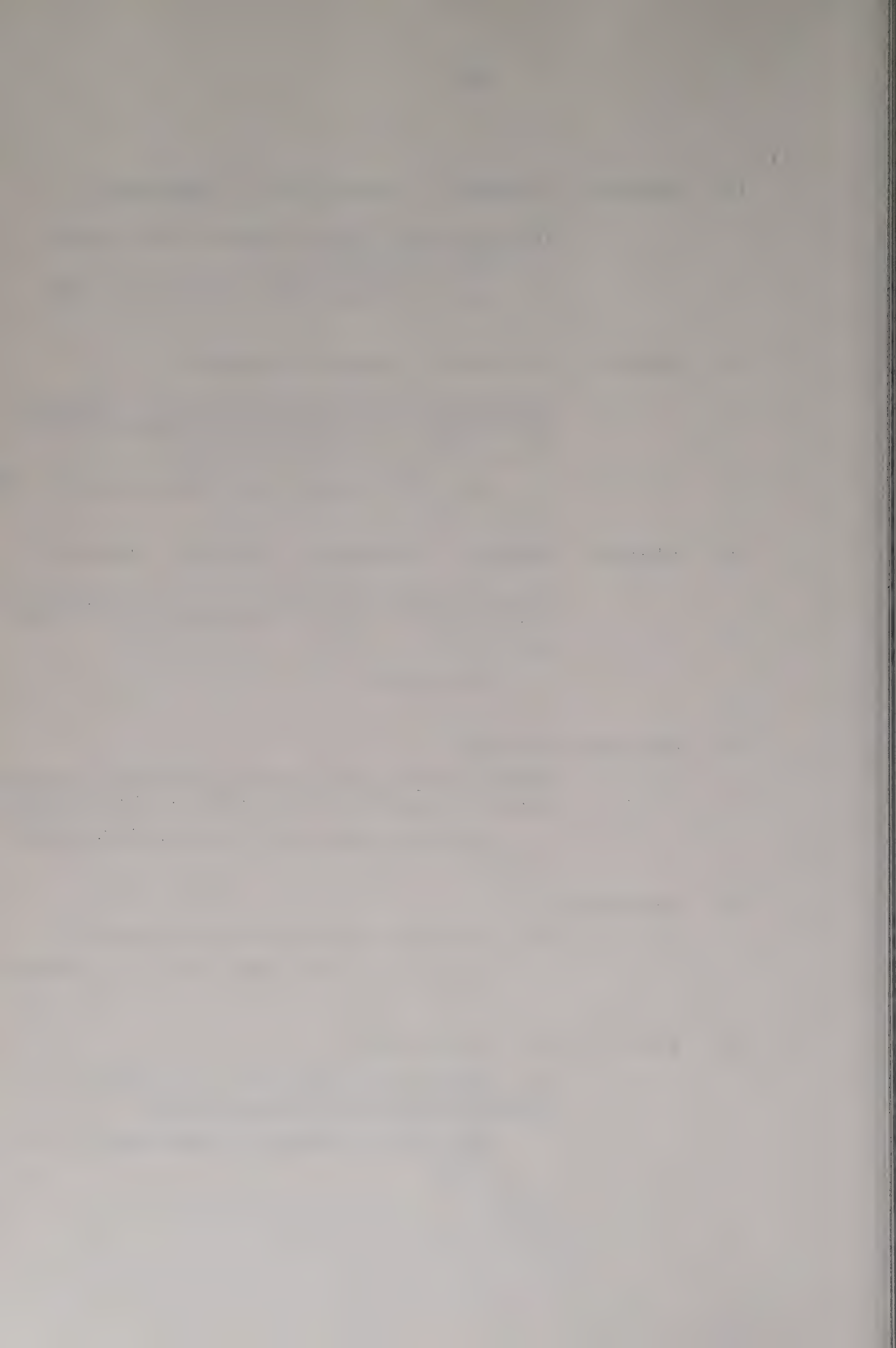
"An erythron dependent model of iron kinetics".

Biophysical Journal, 1966, Vol. 6, (pp. 601-609).

- 19 POLLYCOVE M. ; MORTIMER R.

"The quantitative determination of iron kinetics and
hemoglobin synthesis in human subjects".

The Journal of Clinical Investigation - 40 - 753
(1961).



NOM DE L'ETUDIANT : MONOT Claudine

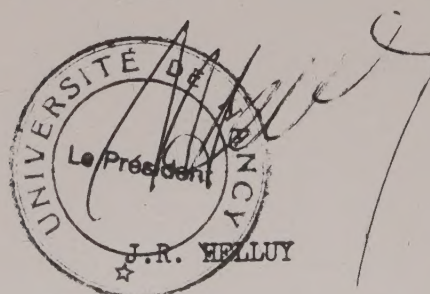
NATURE DE LA THESE : DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES

VU, APPROUVE

& PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 2 JUIN 1975

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I



RECEIVED

1914

RECEIVED

RECEIVED

RECEIVED

RECEIVED



